

7. Übung zur Vorlesung „Rekursionstheorie“
Wintersemester 2009/2010

22.01.2010

Abgabe: Donnerstag, den 28.01.2010

Aufgabe 7.1:

Zeigen Sie, dass jede unendliche rekursiv aufzählbare Menge eine unendliche rekursive Teilmenge enthält.

Analog zu den effektiven Operationen für die Numerierung $(\kappa_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nennen wir eine (zweistellige) Operation **op** auf rekursiv aufzählbaren Teilmengen von $\mathbb{N}$ *effektiv*, falls es eine rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt, für welche die Gleichung

$$\text{dom}(\kappa_i) \text{ op } \text{dom}(\kappa_j) = \text{dom}(\kappa_{f(i,j)}) \text{ gilt.}$$

Aufgabe 7.2:

(a) Zeigen Sie, dass die Operationen $\cap$, $\cup$ sowie $\times$ rekursiv sind.

Hierbei sei $A \times B := \{c(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

(b) Gilt dies analog auch für die Operationen $\kappa_i(\text{dom}(\kappa_j))$ und $\kappa_i^{-1}(\text{dom}(\kappa_j))$?

Aufgabe 7.3:

Zeigen Sie, dass die Menge der Indices aller „quasikonstanten“ Funktionen $\mathcal{QK} := \{i : |\kappa_i(\mathbb{N})| \leq 1\}$ nicht aufzählbar ist, obwohl diese Menge effektiv numerierbar ist.

Hinweis: Sie können den Satz von RICE benutzen und zeigen, dass die Menge $\{i : \exists x \exists y (x, y \in \text{dom}(\kappa_i) \wedge \kappa_i(x) \neq \kappa_i(y))\}$ rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 7.4:

Zeigen Sie, dass es eine partiell-rekursive Funktion κ_n mit der Eigenschaft $\text{dom}(\kappa_n) = \{n\}$ gibt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass es eine rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\text{dom}(\kappa_{f(n)}) = \{n\}$ gibt, und benutzen Sie den Fixpunktsatzsatz.