

5. Übung zur Vorlesung „Rekursionstheorie“ Wintersemester 2009/2010

11.12.2009

Abgabe: Donnerstag, den 17.12.2009

Im Zusammenhang mit der KLEENESchen Normalform für partiell-rekursive Funktionen $\varphi(\vec{x}) := l(\mu y(g(\vec{x}, y) = 0))$ ist es von Interesse, ob es möglich ist, auch noch die äußere Funktion l dabei wegzulassen. Wir betrachten zu diesem Zweck partiell-rekursive Funktionen der Form

$$\varphi(\vec{x}) := \mu y(g(\vec{x}, y) = 0), \quad (1)$$

wobei g eine (primitiv-) rekursive Funktion sei.

Aufgabe 5.1:

Zeigen Sie den folgenden Satz von SKOLEM:

Eine Funktion φ ist genau dann in der Form (1) darstellbar, wenn ihr Graph G_φ (primitiv-) rekursiv ist.

Aufgabe 5.2:

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbare Mengen. Dann sind auch $A \cup B, A \cap B, \varphi(A)$ und $\varphi^{-1}(A)$ für beliebiges $\varphi \in \mathcal{P}$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 5.3:

Es sei $\varphi : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ eine partiell-rekursive Funktion mit rekursivem Definitionsbereich $\text{dom}(\varphi)$. Dann ist auch der Graph G_φ rekursiv.

Gilt eine analoge Aussage auch für den Wertebereich $\varphi(\mathbb{N})$?

Aufgabe 5.4:

Der Weihnachtsmann verfügt über eine unendliche rekursiv aufzählbare Menge von Geschenken $\mathcal{G} = \{g_0, g_1, \dots, g_i, \dots\}$, wobei wir der Einfachheit halber $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{N}$ annehmen wollen. Von der Firma **BananaSoft Hacker** GmbH wurde ihm zum Abruf der Geschenke ein Programm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{G}$ aufgedrängt.

Bei der Benutzung stellte sich heraus, dass nach Aufruf von $f(0), \dots, f(10)$ das dem Eingabewert 10 entsprechende Geschenk nicht mehr verfügbar war. Daraufhin reklamierte der Weihnachtsmann das Programm wegen mangelhafter Leistung. Die Firma **BananaSoft Hacker** GmbH erwiderte mit dem Einwand, dass bei einer derartigen unendlichen rekursiv aufzählbaren Menge von Geschenken eine Zuordnung, die unterschiedlichen Eingabewerten auch unterschiedliche Geschenke zuweise, unmöglich sei. Der Weihnachtsmann fühlte sich arg betrogen und rief das Amtsgericht an.

Sie werden vom Amtsgericht als unabhängiger Gutachter bestellt und sollen feststellen, ob die **BananaSoft Hacker** GmbH recht hat. Wie entscheiden Sie?