Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger

D–06120 HALLE (Saale)
von-Seckendorf-Platz 1
Tel. 0345/55 24714

4. Übung zur Vorlesung „Rekursionstheorie"

Wintersemester 2009/2010 — 11.12.2009

Abgabe: Donnerstag, den 17.12.2009

Aufgabe 4.1:

Geben Sie ein Beispiel von Funktionen $g, h \in \mathcal{E}^1$ an, für die $\mathbf{R}(g; h) \notin \mathcal{E}^2$ gilt.

Aufgabe 4.2:

Es sei $\mathbb{P}$ ein allgemeines Programm. Zeigen Sie, dass die gemäß

$$\tau_{\mathbb{P}}(x, t) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathrm{Time}_{\mathbb{P}}(x) \leq t, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Funktion $\tau_{\mathbb{P}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv ist.

Aufgabe 4.3:

Die folgende Funktion $T : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei durch die Doppelrekursion

$$\begin{aligned} T(0, x) &= x + 2 \\ T(n+1, 0) &= 1 \text{ und} \\ T(n+1, x+1) &= T(n, T(n+1, x)) \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie, dass T nicht primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 4.4:

Die klassische ACKERMANN-PÉTER-Funktion $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist mittels der Doppelrekursion

$$\begin{aligned} A(0, x) &= x + 1 \\ A(n+1, 0) &= A(n, 1) \text{ und} \\ A(n+1, x+1) &= A(n, A(n+1, x)) \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie ebenfalls, dass A nicht primitiv rekursiv ist.

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist *(primitiv) rekursiv*, falls ihre charakteristische Funktion $\chi_M : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ (primitiv) rekursiv ist. Eine nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist *rekursiv aufzählbar*, falls es eine rekursive Funktion $f_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(\mathbb{N}) = M$ gibt.

Aufgabe 4.5:

(a) Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ (primitiv) rekursive Mengen. Zeigen Sie dass dann auch $A \cup B$, $A \cap B$, $\mathbb{N} \setminus A$ (primitiv) rekursiv sind. Weiter sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine (primitiv) rekursive Funktion. Ist dann auch $f^{-1}(A)$ (primitiv) rekursiv?

(b) Gibt es zu einer Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ eine (primitiv) rekursive aufzählende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $f(x) \geq x$, so ist A (primitiv) rekursiv.