Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger

D–06120 HALLE (Saale)
von-Seckendorf-Platz 1
Tel. 0345/55 24714

3. Übung zur Vorlesung „Rekursionstheorie“

Wintersemester 2009/2010 26.11.2009

Abgabe: Donnerstag, den 03.12.2009

Wir definieren weiter für $j \geq 3$ die Klassen $\mathcal{E}^j$ der sogenannten GRZEGORCZYK-Hierarchie als die Klassen aller Funktionen, die sich aus den Anfangsfunktionen $\mathcal{A}_0$ und den Funktionen E_i, wobei $E_1(x,y) := x + y$, $E_2(x) := x^2 + 2$ bzw. $E_n(0) := 2$ und $E_n(x+1) := E_{n-1}(E_n(x))$ für $n \geq 3$ seien, durch Substitution und beschränkte primitive Rekursion erzeugen lassen; genauer gesagt, $\mathcal{E}^j$ ist die Vereinigung aller Klassen $\mathcal{A}_i^j$, wobei $\mathcal{A}_0^j := \mathcal{A}^0 \cup \{E_1, E_j\}$ und

$$\mathcal{A}_{i+1}^j := \mathcal{A}_i^j \cup \{\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k) : k \in \mathbb{N} \land f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{A}_i^j\} \cup \{\mathbf{BR}(g,h;b) : g,h,b \in \mathcal{A}_i^j\}.$$

Aufgabe 3.1:

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Funktionen E_n, $n \geq 2$:

$$\begin{array}{rcll} E_n(x) & \geq & x+1 & (3.1.1) \\ E_n(x+1) & \geq & E_n(x) & (3.1.2) \\ E_{n+1}(x) & \geq & E_n(x) & (3.1.3) \\ E_{n+1}(x+k) & \geq & E_n^k(x) & (3.1.4) \end{array}$$

Aufgabe 3.2:

In welcher Klasse der GRZEGORCZYK-Hierarchie liegt das Ergebnis der (unbeschränkten) primitiven Rekursion $\mathbf{R}(g,h)$, wenn $g, h \in \mathcal{E}^i$?

Aufgabe 3.3:

Welche Klassen von primitiv rekursiven Funktionen werden definiert, wenn man für $j \geq 1$ in der angegebenen Definition der GRZEGORCZYK-Klassen die Funktionen E_j durch die aus der Vorlesung bekannten Funktionen t_{j-1} ersetzt?

Hinweis: *Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen*

$$\begin{array}{rcll} t_j^2(t_{j+1}(x)) & \leq & t_{j+1}(t_j(x)) & \text{für } x > 0, \\ t_j(x) & \leq & E_{j+1}(x) & \text{für } j \geq 1 \text{ , und} \\ E_{j+1}(x) & \leq & t_j^2(x) & \text{für } j \geq 2 \text{ .} \end{array}$$

Aufgabe 3.4:

Weisen Sie nach, daß die Klassen $\mathcal{L}_i$ der **LOOP**-Hierarchie eine echt aufsteigende Kette bilden.

Hinweis: *Zeigen Sie u.a.* $t_{i+1}(x+k) > t_i^k(x+k)$ *für* $x \geq k$.

Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger

D–06120 HALLE (Saale)
von-Seckendorf-Platz 1
Tel. 0345/55 24714

3. Übung zur Vorlesung „Rekursionstheorie"
Wintersemester 2009/2010 26.11.2009

Abgabe: Donnerstag, den 03.12.2009

Wir definieren weiter für $j \geq 3$ die Klassen $\mathcal{E}^j$ der sogenannten GRZEGORCZYK-Hierarchie als die Klassen aller Funktionen, die sich aus den Anfangsfunktionen $\mathcal{A}_0$ und den Funktionen E_i, wobei $E_1(x, y) := x + y$, $E_2(x) := x^2 + 2$ bzw. $E_n(0) := 2$ und $E_n(x + 1) := E_{n-1}(E_n(x))$ für $n \geq 3$ seien, durch Substitution und beschränkte primitive Rekursion erzeugen lassen; genauer gesagt, $\mathcal{E}^j$ ist die Vereinigung aller Klassen $\mathcal{A}_i^j$, wobei $\mathcal{A}_0^j := \mathcal{A}^0 \cup \{E_1, E_j\}$ und

$$\mathcal{A}_{i+1}^j := \mathcal{A}_i^j \cup \{\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k) : k \in \mathbb{N} \wedge f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{A}_i^j\} \cup \{\mathbf{BR}(g, h; b) : g, h, b \in \mathcal{A}_i^j\}.$$

Aufgabe 3.1:
Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Funktionen E_n, $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} E_n(x) &\geq x + 1 && (3.1.1) \\ E_n(x+1) &\geq E_n(x) && (3.1.2) \\ E_{n+1}(x) &\geq E_n(x) && (3.1.3) \\ E_{n+1}(x+k) &\geq E_n^k(x) && (3.1.4) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2:
In welcher Klasse der GRZEGORCZYK-Hierarchie liegt das Ergebnis der (unbeschränkten) primitiven Rekursion $\mathbf{R}(g, h)$, wenn $g, h \in \mathcal{E}^i$?

Aufgabe 3.3:
Welche Klassen von primitiv rekursiven Funktionen werden definiert, wenn man für $j \geq 1$ in der angegebenen Definition der GRZEGORCZYK-Klassen die Funktionen E_j durch die aus der Vorlesung bekannten Funktionen t_{j-1} ersetzt?

Hinweis: *Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen*

$$\begin{aligned} t_j^2(t_{j+1}(x)) &\leq t_{j+1}(t_j(x)) && \text{für } x > 0, \\ t_j(x) &\leq E_{j+1}(x) && \text{für } j \geq 1 \text{, und} \\ E_{j+1}(x) &\leq t_j^2(x) && \text{für } j \geq 2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4:
Weisen Sie nach, daß die Klassen $\mathcal{L}_i$ der **LOOP**-Hierarchie eine echt aufsteigende Kette bilden.

Hinweis: *Zeigen Sie u.a.* $t_{i+1}(x + k) > t_i^k(x + k)$ *für* $x \geq k$.