Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger

D–06120 HALLE (Saale)
Kurt-Mothes-Straße 1
Tel. 0345/55 24714

2. Übung zur Vorlesung „Rekursionstheorie“
Wintersemester 2009/2010 16.10.2009

Abgabe: Donnerstag, den 30.10.2009

Aufgabe 2.1:

Es seien $f(x,y) := x^y$, sowie $\psi_1 := \mathbf{S}(f; I_3^3, I_1^3)$ und $\psi_2 := \mathbf{S}(f; I_1^3, I_3^3)$. Bestimmen Sie die Funktionen: $g_1 := \mathbf{R}(I_1^1, \psi_1)$ und $g_2 := \mathbf{R}(I_1^1, \psi_2)$.

Analog zur Klasse $\mathcal{E}^0$ definieren wir die erste und zweite Klasse $\mathcal{E}^1$ bzw. $\mathcal{E}^2$ der sogenannten GRZEGORCZYK-Hierarchie als die Klassen aller Funktionen, die sich aus den Anfangsfunktionen $\mathcal{A}_0$ und den Funktionen $E_1(x,y) := x + y$ bzw. $E_2(x) := x^2 + 2$ durch Substitution und beschränkte primitive Rekursion erzeugen lassen, d.h. $\mathcal{E}^j$ $(j = 1,2)$ ist die Vereinigung aller Klassen $\mathcal{A}_i^j$, wobei $\mathcal{A}_0^j := \mathcal{A}^0 \cup \{E_i : i \leq j\}$ und

$$\mathcal{A}_{i+1}^j := \mathcal{A}_i^j \cup \{\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k) : k \in \mathbb{N} \wedge f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{A}_i^j\} \cup \{\mathbf{BR}(g,h;b) : g,h,b \in \mathcal{A}_i^j\}.$$

Aufgabe 2.2:

(a) Zeigen Sie, dass es für $f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{E}^1$ Konstanten $c_1, \ldots, c_{k+1}$ gibt, so dass $\forall x_1 \ldots \forall x_k (f(x_1, \ldots, x_k) \leq c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_k \cdot x_k + c_{k+1})$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes $f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{E}^2$ ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_k)$ mit $\forall x_1 \ldots \forall x_k (f(x_1, \ldots, x_k) \leq p(x_1, \ldots, x_k))$ existiert.

(c) Zeigen Sie die echte Inklusion $\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2$.

Aufgabe 2.3:

Welche der in den Beispielen der Vorlesung eingeführten Funktionen *quot*, *rest*, *prim*, *nd*, *p*, *len* und *exp* gehören zu den Klassen $\mathcal{E}^0$, $\mathcal{E}^1$ bzw. $\mathcal{E}^2$?
Zu welcher der Klassen gehört die Funktion $p^{(2)}$, die wie folgt definiert ist

$$p^{(2)}(x,z) := \begin{cases} p(x), & \text{falls } p(x) \leq z \text{ , und} \\ 0, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Aufgabe 2.4:

Zeigen Sie, daß keine CANTOR-Numerierung $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in der GRZEGORCZYK-Klasse $\mathcal{E}^1$ liegt, und prüfen Sie nach, ob die Numerierungen $c_1(x,y) := \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x = x + \sum_{t \leq x+y} t$ bzw. $c_2(x,y) := \left(\lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor + y\right)^2 + x$ tatsächlich schon in $\mathcal{E}^2$ liegen.

Aufgabe 2.5:

In welcher GRZEGORCZYK-Klasse $\mathcal{E}^i$ liegen die entsprechenden Umkehrfunktionen

$$\begin{array}{rcl} \ell_1(z) & := & z \dot{-} \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1}+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1}\dot{-}1}{2} \right\rfloor \quad \text{und} \quad r_1(z) \; := \; \left\lfloor \frac{\sqrt{8z+1}\dot{-}1}{2} \right\rfloor \dot{-} \ell_1(z) \quad \text{bzw.} \\ \ell_2(z) & := & \mathbf{q}(z) := z \dot{-} \left(\lfloor \sqrt{z} \rfloor\right)^2 \quad \text{und} \quad r_2(z) \; := \; \lfloor \sqrt{z} \rfloor \dot{-} \lfloor (\mathbf{q}(z)+1)/2 \rfloor \; . \end{array}$$

Hinweis: *Sie können* $\frac{(x+y+1)(x+y)}{2} = \sum_{t \leq x+y} t$ *bzw.* $(z+1)^2 = \sum_{t \leq z}(2t+1)$ *benutzen.*

Aufgabe 2.6:

Überlegen Sie sich eine CANTOR-Numerierung c_{bin}, die selbst und deren Umkehrfunktionen ℓ_{bin} und r_{bin} sowohl arithmetisch als auch speziell im Falle binärer Zahlendarstellung besonders einfach berechenbar sind.

Aufgabe 2.7:

Wir definieren eine *beschränkte Rekursion* $\mathbf{BR}'(g,h,b)$ *zur Laufzeit* durch das folgende Schema:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{BR}'(g,h,b)(\vec{x},0) & := & \min\{g(\vec{x}), b(\vec{x},0)\} \\ \mathbf{BR}'(g,h,b)(\vec{x},n+1) & := & \min\{h(\vec{x},n,\mathbf{BR}'(g,h,b)(\vec{x},n)), b(\vec{x},n+1)\} \; . \end{array}$$

Zeigen Sie, dass sich die Klassen $\mathcal{E}^0$, $\mathcal{E}^1$ bzw. $\mathcal{E}^2$ statt mit **BR** auch mit $\mathbf{BR}'$ definieren lassen.

Die Klasse der *zulässigen Funktionen* $\mathfrak{Z} \subseteq \mathcal{F}^1$ sei wie folgt definiert.

(a) Die Funktionen $s \in \mathcal{A}_0$ und $\mathbf{q}$ mit $\mathbf{q}(n) := n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$ sind in $\mathfrak{Z}$.

(b) Aus $f, g \in \mathfrak{Z}$ folgt f^I, $(f+g)$, $f \circ g := \mathbf{S}(f;g) \in \mathfrak{Z}$.

(c) Weitere zulässige Funktionen gibt es nicht (Abschluß).

Hierbei sei die *einfache Iteration* f^I einer einstelligen Funktion wie folgt definiert:
$f^I(0) := 0$ und $f^I(n+1) := f(f^I(n))$, d.h. $f^I(n) = \underbrace{f(f \ldots (f}_{n-\text{mal}}(0)))$

Verallgemeinernd definieren wir die Klasse beliebigstelliger zulässiger Funktionen $\hat{\mathfrak{Z}}$:
$f \in \mathcal{F}^m$ ist genau dann in $\hat{\mathfrak{Z}}$, wenn für beliebige m zulässige Funktionen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathfrak{Z}$ die einstellige Funktion $f_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} := \mathbf{S}(f;\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, d.h. $f_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}(x) = f(\alpha_1(x),\ldots,\alpha_m(x))$ ebenfalls zulässig ist.

Aufgabe 2.8:

Bestimmen Sie die einfache Iteration $f_i^{\mathcal{I}}$ folgender Funktionen:

(a) $f_1(x) := a \cdot x + b$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$.

(b) $f_2(x) := (1 \dot{-} x) + 2x$

(c) $f_3(x) := 1 + \lfloor x/2 \rfloor$.

Aufgabe 2.9:

(a) Sind $f, g \in \mathcal{F}^m$ in $\hat{\mathfrak{Z}}$, so ist auch $(f+g)$ mit $(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ in $\hat{\mathfrak{Z}}$.

(b) Sind $f \in \mathcal{F}^n, g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{F}^m$ in $\hat{\mathfrak{Z}}$, so ist auch $\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_n)$ in $\hat{\mathfrak{Z}}$.

Aufgabe 2.10:

Zeigen Sie:

(a) Die einstelligen Funktionen I_1^1, C_0^1, sg, $\overline{sg}$, odd und $\square$ mit

$$\text{odd}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\square(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ Quadratzahl,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \text{ sind in } \mathfrak{Z}.$$

(b) Die m-stelligen Funktionen I_k^m $(1 \le k \le m)$ und die zweistellige Funktion φ_1 mit $\varphi_1(x, y) = ax + by + c$ für feste $a, b, c \in \mathbb{N}$ sind in $\hat{\mathfrak{Z}}$.

Aufgabe 2.11:

Zeigen Sie, dass alle primitiv rekursiven Funktionen **LOOP**-berechenbar sind.

Aufgabe 2.12:

Prüfen Sie, ob es möglich ist, für **LOOP**-Programme eine Anweisung der Form

IF $X \neq 0$ **EXIT**,

welche ein bedingtes Verlassen der **LOOP**-Schleife bewirkt, zuzulassen, ohne dass sich die Klasse der berechenbaren Funktionen dabei vergrößert.

Aufgabe 2.13:

Es sei $\mathcal{L}^0$ die Klasse aller **LOOP**-berechenbaren Funktionen, für welche es ein **LOOP**-Programm der Schachtelungstiefe 0, d.h. ein **LOOP**-Programm $\mathbb{P}$ ohne (**LOOP** ... **END**) -Anweisung, gibt, das f berechnet. Man zeige, dass f genau dann in $\mathcal{L}^0$ liegt, wenn

$$\exists i \exists m \forall x_1 \ldots \forall x_k (f(x_1, \ldots, x_k) = x_i + m \vee f(x_1, \ldots, x_k) = m) \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 2.14:

Schreiben Sie **LOOP**-Programme für die Funktionen aus den Aufgaben 1.1 und 2.3.

Es sei $\mathcal{L}_1$ die Klasse der mit Schachtelungstiefe 1 **LOOP**-berechenbaren Funktionen, d.h. der Funktionen die durch **LOOP**-Programme, die keine ineinander geschachtelten (**LOOP** ... **END**) -Anweisungen enthalten, berechenbar sind.

Aufgabe 2.15:

Zeigen Sie, dass die Funktionen $w(x, y) := x \cdot (1 \dot{-} y) + y$, $f_1(x) := x \dot{-} 1$ und $f_+(x, y) := x + y$ und in $\mathcal{L}_1$ liegen.

Aufgabe 2.16:

Zeigen Sie, dass die Funktionen $quot_k(x) := quot(x,k)$ und $rest_k(x) := rest(x,k)$, wobei $k \in \mathbb{N},\ k > 0$, eine Konstante sei, zu $\mathcal{L}_1$ gehören.

Aufgabe 2.17:

Untersuchen Sie die Inklusionsbeziehungen zwischen den Funktionenklassen $\mathcal{L}^0, \mathcal{L}^1$ und $\mathcal{E}^0$.

Wissenswertes über Primzahlen

Es seien p_i die i-te Primzahl ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$) und $\pi(x) := \max\{i : p_i \leq x\}$. Dann gelten:*

$$n \cdot (\ln(n \cdot \ln n) - \tfrac{3}{2}) < \quad p_n \quad < n \cdot (\ln(n \cdot \ln n) - \tfrac{1}{2}) \quad \textit{für } n \geq 20 \quad \textit{und}$$

$$\frac{x}{\ln x - 1/2} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 3/2} \qquad \textit{für } x \geq 67\ .$$

*nach: J. Barkley Rosser & L. Schoenfeld, *Approximal Formulas for Some Functions of Prime Numbers.* Ill. Journ. Math. **6** (1962), 64 – 94.