7 m-Reduktion von Mengen

7.1 Einfache Eigenschaften

$$A \leq_m B \iff \exists f(f \in \mathcal{R} \wedge A = f^{-1}(B))$$

Eigenschaft 7.1:

(a) $A \leq_m A$

(b) $A \leq_m B \wedge B \leq_m C \Rightarrow A \leq_m C$

(c) $A \leq_m B \iff (\mathbb{N} \setminus A) \leq_m (\mathbb{N} \setminus B)$

(d) $A \neq \emptyset \iff \mathbb{N} \leq_m A$

(e) Ist B rekursiv aufzählbar und $A \leq_m B$, so ist auch A rekursiv aufzählbar.

(f) Ist B rekursiv und $A \leq_m B$, so ist auch A rekursiv.

Eigenschaft 7.2: *Ist A rekursiv und $B \notin \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, so gilt $A \leq_m B$, und sind $A, B \notin \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ und rekursiv, so gelten $A \leq_m B$ und $B \leq_m A$.*

Schreibweise: $A \oplus B := \{2x : x \in A\} \cup \{2y+1 : y \in B\}$

Eigenschaft 7.3 (kleinste obere Schranke): *Für je zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ gibt es ein C (z.B. $C = A \oplus B$) derart, dass $A \leq_m C$, $B \leq_m C$ gelten und für alle $C' \subseteq \mathbb{N}$ aus $A \leq_m C'$ und $B \leq_m C'$ stets $C \leq_m C'$ folgt.*

Eigenschaft 7.4: *Es gibt Mengen $A, B \notin \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ derart, dass $A \not\leq_m B$ und $B \not\leq_m A$.*

7.2 m-vollständige, kreative und produktive Mengen

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt *m-vollständig*, wenn A rekursiv aufzählbar ist und für jede rekursiv aufzählbare Menge $B \subseteq \mathbb{N}$ die Beziehung $B \leq_m A$ gilt.

Eigenschaft 7.5: $K_0 := \{c(i,x) : \kappa_i(x)$ *ist definiert*$\}$ *ist m-vollständig.*

Lemma 7.6: $K := \{x : \kappa_x(x)$ *ist definiert*$\}$ *ist m-vollständig.*

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ heißt *produktiv*, falls es ein $\psi \in \mathcal{P}$ mit der Eigenschaft

$$\forall i(dom(\kappa_i) \subseteq A \rightarrow i \in dom(\psi) \wedge \psi(i) \in A \setminus dom(\kappa_i)) \text{ gibt.}$$

ψ heißt dabei *produktive Funktion* für A.

Eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}$ heißt *kreativ*, falls B rekursiv aufzählbar ist und $\mathbb{N} \setminus B$ produktiv ist.

K ist kreativ (mit $\psi = I_1^1$ als produktiver Funktion für $\mathbb{N} \setminus K$).

Lemma 7.7: *Wenn A produktiv ist, so ist A nicht rekursiv aufzählbar, und aus $A \leq_m B$ folgt, dass auch B produktiv ist.*

Folgerung 7.8: *Wenn B kreativ ist, so ist B nicht rekursiv und aus $B \leq_m M$ folgt, dass $\mathbb{N} \setminus M$ produktiv ist. Weiterhin sind m-vollständige Mengen stets kreativ.*

Satz 7.9: *Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann produktiv, wenn es eine rekursive produktive Funktion für A gibt.*

Eigenschaft 7.10: *Es sei f eine rekursive produktive Funktion für A. Dann gelten*

$$
\begin{aligned}
dom(\kappa_x) &= \{f(x)\} &\implies& f(x) \in \mathbb{N} \setminus A \text{ und} \\
dom(\kappa_x) &= \emptyset &\implies& f(x) \in A.
\end{aligned}
$$

Satz 7.11 (Myhill): *Eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann kreativ, wenn sie m-vollständig ist.*

Lemma 7.12: *Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ produktiv, so enthält A eine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge.*

7.3 Immune und einfache Mengen

Eine Teilmenge A von $\mathbb{N}$ heißt *immun*, falls A unendlich ist, aber keine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge enthält. A heißt *biimmun*, falls A und $\mathbb{N} \setminus A$ immun sind.

Eine Menge $B \subseteq \mathbb{N}$ heißt *einfach*, falls B rekursiv aufzählbar und $\mathbb{N} \setminus B$ immun sind.

Eigenschaft 7.13: *Es gibt biimmune Mengen.*

Satz 7.14: *Es gibt einfache Mengen.*

Eigenschaft 7.15: *Einfache Mengen sind nicht kreativ.*