6 Effektive Numerierungen partiell-rekursiver Funktionen

Eigenschaft 6.1: *Für beliebige $k \geq 1$ gilt*
$$c^{k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1}) = c^k(c(x_1,x_2),\ldots,x_{k+1}) \ .$$

Eigenschaft 6.2:
$$\begin{aligned}\Phi^{(k+1)}(i,x_1,\ldots,x_k) &= \Phi^{(k)}(i,c(x_1,x_2),\ldots,x_k)\\ \Gamma^{(k+1)}(i,x_1,\ldots,x_k) &= \Gamma^{(k)}(i,c(x_1,x_2),\ldots,x_k)\end{aligned}$$

KLEENE-Numerierung:
$$\begin{aligned}[x,y] &:= c\,(\ell(x)\,,c(r(x),y))\\ [x_1,\ldots,x_k] &:= [\,[x_1,\ldots,x_{k-1}],x_k]\end{aligned}$$

Eigenschaft 6.3:
$$[x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_k] = \big[[x_1,\ldots,x_m],x_{m+1},\ldots,x_k\big]$$

$$\begin{aligned}K^2(i,x) &:= \Gamma^{(1)}\Big(\ell(i)\,,c(r(i),x)\Big)\\ K^{m+1}(i,x_1,\ldots,x_m) &:= K^m\Big([i,x_1],x_2,\ldots,x_m\Big)\end{aligned}$$

Lemma 6.4 (Beziehung zwischen K und Γ):

$$K^m\big(c(j,x_1),x_2,\ldots,x_m\big) = \Gamma^{(m)}(j,x_1,\ldots,x_m)$$

Satz 6.5: *Die Funktion K^m ist eine effektive Numerierung für die Menge aller $(m-1)$-stelligen partiell-rekursiven Funktionen.*

Folgerung 6.6: *Jede partiell-rekursive Funktion hat unendlich viele Nummern.*

Satz 6.7 (s-m-n-Theorem, Iterationssatz):

$$K^{m+n+1}(x_0,\ldots,x_{m+n}) = K^{n+1}\big([x_0,\ldots,x_m],x_{m+1},\ldots,x_{m+n}\big)$$

Satz 6.8 (KLEENEscher Fixpunktsatz, Rekursionstheorem): *Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $\varphi \in \mathcal{P}^{n+1}$ existiert eine primitiv-rekursive Funktion $\mathbf{g}$ derart, dass für $n < m$ stets*

$$\begin{aligned}&K^{m-n+1}\big(\varphi(x_1,\ldots,x_n,\mathbf{g}(x_1,\ldots,x_n)),x_{n+1},\ldots,x_m\big)\\ &\qquad = K^{m-n+1}\big(\mathbf{g}(x_1,\ldots,x_n),x_{n+1},\ldots,x_m\big)\end{aligned}$$

gilt.

Bemerkung: Ist hierbei $\varphi(x_1,\ldots,x_n,\mathbf{g}(x_1,\ldots,x_n))$ nicht definiert, so ist $\mathbf{g}(x_1,\ldots,x_n)$ eine K^{m-n+1}-Nummer der nirgends definierten Funktion.

Satz 6.9 (Satz von RICE): *Keine nichttriviale Eigenschaft partiell-rekursiver Funktionen ist entscheidbar, d.h. ist $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ so ist die Menge $\{i : \kappa_i \in \mathcal{S}\}$ nicht rekursiv.*

Satz 6.10 (Padding-Theorem): *Zu jedem $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine zweistellige rekursive Funktion g_m derart, dass für alle $i,i' \in \mathbb{N}$ und alle $y,y' \in \mathbb{N}$ die Beziehungen*

$$\begin{aligned}g_m(i,y) &\neq g_m(i',y') && \text{falls } y \neq y' \text{ oder } i \neq i' \text{ und}\\ \kappa_i^{(m)} &= \kappa_{g_m(i,y)}^{(m)} && \text{gelten.}\end{aligned}$$

Lemma 6.11 (Umrechnung der Indizes): *Es gibt primitiv-rekursive Funktionen g,h derart, dass*

$$\forall i\big(i \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ dom(\kappa_i) = \kappa_{g(i)}(\mathbb{N})\ \big) \quad \text{und}$$
$$\forall i\big(i \in \mathbb{N} \ \rightarrow \ \kappa_i(\mathbb{N}) = dom(\kappa_{h(i)})\big) \quad \text{gelten.}$$