

5 Partiell-rekursive Funktionen

Uneingeschränkter μ -Operator: $\mathbf{M}(\psi)(\vec{x}) = \mu t(\psi(\vec{x}, t) = 0)$

$$\mathcal{P} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i, \text{ wobei}$$

$$\mathcal{B}_0 := \mathcal{A}_0, \text{ und}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i+1} := & \mathcal{B}_i \cup \{ \mathbf{S}(\varphi; \psi_1, \dots, \psi_k) : k \in \mathbb{N} \wedge \varphi, \psi_1, \dots, \psi_k \in \mathcal{B}_i \} \cup \\ & \cup \{ \mathbf{R}(\varphi, \psi) : \varphi, \psi \in \mathcal{B}_i \} \cup \{ \mathbf{M}(\varphi) : \varphi \in \mathcal{B}_i \} \end{aligned}$$

Rekursive Funktionen:

$$\mathcal{R} := \mathcal{P} \cap \{ f : f \text{ ist vollstandig definiert} \}$$

5.1 Allgemeine Programme

Erweiterung der **LOOP**-Programme um zusätzliche Bausteine:

- a) $\boxed{i}$, wobei $i \in \mathbb{N}$ (Sprungmarke), und
- b) **IF** $X \neq 0$ **GOTO** i .

1. **LOOP**-Programme sind allgemeine Programme.

2. Sind	INPUT $X_1, \dots, X_\ell$	INPUT $Y_1, \dots, Y_k$
	P	Q
	OUTPUT X_i	OUTPUT Y_j

allgemeine Programme, haben **P** und **Q** keine Sprungmarken
gemeinsam und kommt $\boxed{i}$ nicht in **P** vor, so sind auch

INPUT $X_1, \dots, X_\ell$	INPUT $X_1, \dots, X_\ell$ und	INPUT $X_1, \dots, X_\ell$
P	LOOP X_i	$\boxed{i}$
Q	P	P
OUTPUT Y_j	END	IF $X \neq 0$ GOTO i
	OUTPUT X_m	OUTPUT X_m

allgemeine Programme.

Satz 5.1: *Eine Funktion ist genau dann partiell-rekursiv, wenn sie von einem allgemeinen Programm berechnet wird.*

Lemma 5.2: *Es sei $\mathbb{P}$ ein allgemeines Programm. Dann ist die Funktion $\text{Time}_{\mathbb{P}}$ partiell-rekursiv. $\text{Time}_{\mathbb{P}}$ ist rekursiv, falls die von $\mathbb{P}$ berechnete Funktion $\varphi_{\mathbb{P}}$ ebenfalls rekursiv ist.*

Lemma 5.3: *Die Funktion $\psi(x_1, \dots, x_m)$ sei durch $\mathbb{P}$ berechnet, und $f(x_1, \dots, x_m)$ sei rekursiv. Dann ist*

$$\varphi(\vec{x}) := \begin{cases} \psi(\vec{x}) & , \text{ falls } \text{Time}_{\mathbb{P}}(\vec{x}) \leq f(\vec{x}) , \text{ und} \\ 0 & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

ebenfalls rekursiv.

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt (*primitiv*) *rekursiv*, falls die charakteristische Funktion χ_M (*primitiv*) *rekursiv* ist.

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ heißt *rekursiv aufzählbar*, falls $M = \emptyset$ oder es gibt eine rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ derart, dass $M = f(\mathbb{N})$.

Analog nennen wir $M \subseteq \mathbb{N}^k$ *rekursiv aufzählbar*, falls $c^k(M)$ rekursiv aufzählbar ist.

Folgerung 5.4: *Jede rekursive Menge ist rekursiv aufzählbar.*

Folgerung 5.5: *Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}^k$ rekursiv aufzählbar, so gibt es rekursive Funktionen $f_1, \dots, f_k$ derart, dass*
$$M = \{(f_1(t), \dots, f_k(t)) : t \in \mathbb{N}\}.$$

Wir nennen eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}^k$ *primitiv-rekursiv darstellbar*, falls es eine primitiv-rekursive Funktion g mit

$$M = \{(x_1, \dots, x_k) : \exists a (a \in \mathbb{N} \wedge g(x_1, \dots, x_k, a) = 0)\} \quad \text{gibt.}$$

Satz 5.6: *Eine nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann primitiv-rekursiv darstellbar, wenn es eine primitiv-rekursive Funktion f gibt, die $c^k(M)$ aufzählt.*

Folgerung 5.7: *Jede primitiv-rekursive Menge ist primitiv-rekursiv darstellbar.*

Folgerung 5.8: *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann primitiv-rekursiv darstellbar, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine primitiv-rekursive Funktion $g \in \mathcal{F}^{k+m}$ derart gibt, daß*

$$M = \{(x_1, \dots, x_k) : \exists a_1 \dots \exists a_m (g(x_1, \dots, x_k, a_1, \dots, a_m) = 0)\} .$$

Eine Menge $\mathbf{G}_\psi$ heißt *Graph* einer k -stelligen partiellen Funktion

$\psi : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N} : \iff$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\psi &\subseteq \mathbb{N}^{k+1} \quad \text{und} \\ (x_1, \dots, x_k, y) \in \mathbf{G}_\psi &\iff \psi(x_1, \dots, x_k) = y. \end{aligned}$$

Folgerung 5.9: *Der Graph einer (primitiv) rekursiven Funktion ist (primitiv) rekursiv.*

Satz 5.10: *Der Graph $\mathbf{G}_\psi$ einer partiellen Funktion $\psi : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ist genau dann primitiv-rekursiv darstellbar, wenn ψ partiell-rekursiv ist.*

Hilfssatz 5.11 (Gödel): *Es gibt eine primitiv-rekursive Funktion Γ mit der Eigenschaft*

$$\forall n \forall (a_0, \dots, a_n) (n, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N} \rightarrow \\ \rightarrow \exists z (z \in \mathbb{N} \wedge \forall i (i \leq n \rightarrow \Gamma(z, i) = a_i))) .$$

Beispiel: $\Gamma(z, i) = \exp(z, i)$ für $z = \prod_{i=0}^n p(i)^{a_i}$

Folgerung 5.12 (Normalformsatz von Kleene): *Zu jeder partiell-rekursiven Funktion $\psi : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ gibt es eine primitiv-rekursive Funktion $h_\psi : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ derart, daß*

$$\psi(x_1, \dots, x_k) = \ell(\mu z (h_\psi(x_1, \dots, x_k, z) = 0)) .$$

(Hierbei sei ℓ die linke Umkehrfunktion der CANTOR-Numerierung.)

Folgerung 5.13:

- (a) *Definitions- und Wertebereich partiell-rekursiver Funktionen sind primitiv-rekursiv darstellbar.*
- (b) *Jede nichtleere rekursiv aufzählbare Menge kann schon durch eine primitiv-rekursive Funktion aufgezählt werden.*

Eine partiell-rekursive Funktion $\Phi^{(k)} : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ ist eine *effektive Numerierung* einer Klasse $\mathcal{K}$ von k -stelligen Funktionen : $\Longleftrightarrow$

- (a) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_i(x_1, \dots, x_k) := \Phi(i, x_1, \dots, x_k)$ eine Funktion aus $\mathcal{K}$, und
- (b) für jede Funktion $g \in \mathcal{K}$ gibt es eine Nummer $i \in \mathbb{N}$ derart, dass $g(x_1, \dots, x_k) = \Phi(i, x_1, \dots, x_k)$.

Satz 5.14: *Es gibt eine effektive Numerierung aller einstelligen primitiv-rekursiven Funktionen.*

Satz 5.15: *Es gibt keine effektive Numerierung aller einstelligen rekursiven Funktionen.*

Folgerung 5.16: *Für jedes $k \geq 1$ gibt es eine effektive Numerierung $\Phi^{(k)}$ aller k -stelligen primitiv-rekursiven Funktionen.*

Folgerung 5.17: *Für jedes $k \geq 1$ gibt es eine k -stellige rekursive nicht primitiv-rekursive Funktion.*

Folgerung 5.18: *Es gibt rekursive nicht primitiv-rekursive Teilmengen von $\mathbb{N}^k$ ($k > 0$).*

Folgerung 5.19: Für jedes $k \geq 1$ gibt es eine effektive Numerierung $\Gamma^{(k)}$ aller k -stelligen partiell-rekursiven Funktionen.

Folgerung 5.20: Es gibt k -stellige partiell-rekursive Funktionen, die nicht zu (voll definierten) rekursiven Funktionen erweitert werden können.

Lemma 5.21: Es seien $\varphi \in \mathcal{P}$ und $\text{dom}(\varphi)$ rekursiv. Dann gibt es eine rekursive Funktion f mit $\varphi \subseteq f$.

Folgerung 5.22: Es gibt rekursiv aufzählbare nichtrekursive Mengen.

Folgerung 5.23: Es sei $k \geq 1$. Die Menge $\{M : M \subseteq \mathbb{N}^k \wedge M \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$ ist nicht abgeschlossen bezüglich Komplement.