2 LOOP-Programme

Befehle:

(a) $\textbf{INPUT } X_1, \ldots, X_\ell$

(b) $\textbf{OUTPUT } X_j$

(c) $X = 0$

(d) $X = Y$

(e) $X = X + 1$

(f) $\textbf{LOOP } X$
$\vdots$
$\textbf{END}$

Induktive Programmdefinition:

(a) $\textbf{INPUT } X_1, \ldots, X_\ell$
$\textbf{OUTPUT } X_i$
und
$\textbf{INPUT } X_1, \ldots, X_\ell$
$X_j = 0 \ (= Y, \ = X_j + 1)$
$\textbf{OUTPUT } X_i$
sind **LOOP**-Programme.

(b) Sind $\textbf{INPUT } X_1, \ldots, X_\ell$
P
$\textbf{OUTPUT } X_i$
$\textbf{INPUT } Y_1, \ldots, Y_k$
Q
$\textbf{OUTPUT } Y_j$
LOOP-Programme, so sind auch
$\textbf{INPUT } X_1, \ldots, X_\ell$
P
Q
$\textbf{OUTPUT } Y_j$
und
$\textbf{INPUT } X_1, \ldots, X_\ell$
$\textbf{LOOP } X_i$
P
END
$\textbf{OUTPUT } X_m$
LOOP-Programme.

Satz 2.1: **LOOP**-*berechenbare Funktionen sind primitiv-rekursiv.*

Satz 2.2: *Jede primitiv-rekursive Funktion ist* **LOOP**-*berechenbar.*

3 Hierarchien primitiv-rekursiver Funktionen

3.1 LOOP-Schachtelungstiefe d_L

$$d_L(\boxed{X=0}) = d_L(\boxed{X=Y}) \quad = \quad d_L(\boxed{X=X+1}) := 0$$

$$d_L\left(\boxed{\begin{array}{l} P \\ Q \end{array}}\right) \quad := \quad \max\left\{d_L(\boxed{P}),\ d_L(\boxed{Q})\right\}$$

$$d_L\left(\boxed{\begin{array}{l} \textbf{LOOP } X \\ P \\ \textbf{END} \end{array}}\right) \quad := \quad d_L(\boxed{P}) + 1$$

3.2 Zeitkomplexität von LOOP-Programmen

$\mathrm{Time}_{\mathbb{P}}(x_1,\ldots,x_m)$:= Anzahl der von $\mathbb{P}$ bei Eingabe von $x_1,\ldots,x_m$ ausgeführten Instruktionen

Lemma 3.4: *Ist $\mathbb{P} \in \mathbb{L}_n$, so ist $\mathrm{Time}_{\mathbb{P}} \in \mathcal{L}_n$.*

Folgerung 3.5: *Ist $f \in \mathcal{L}_n$, so gilt*

$$f(x_1,\ldots,x_m) \leq \mathrm{Time}_{\mathbb{P}}(x_1,\ldots,x_m) + \max\{x_1,\ldots,x_m\}\ .$$

für jedes $\mathbb{P} \in \mathbb{L}_n$, welches f berechnet.

Satz 3.6: *Es seien $m \geq 1$ und $n \geq 2$. Eine m-stellige Funktion f ist genau dann in $\mathcal{L}_n$, wenn es ein* **LOOP***-Programm $\mathbb{P}$ gibt, welches f berechnet und für das*

$$\exists k(k \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{Time}_{\mathbb{P}}(x_1,\ldots,x_m) \leq t_n^k(\max\{x_1,\ldots,x_m\})\quad \textit{gilt.}$$

Ein Zusammenhang zwischen den Klassen $\mathcal{L}_n$ und $\mathcal{L}_{n+1}$.

Satz 3.7: *Sind $g_1,\ldots,g_m,h_1,\ldots,h_m \in \mathcal{L}_n$ und entstehen $f_1,\ldots,f_m$ durch simultane Rekursion aus $g_1,\ldots,g_m,h_1,\ldots,h_m$, so sind $f_1,\ldots,f_m \in \mathcal{L}_{n+1}$.*

Folgerung 3.8: *$\mathcal{L}_{n+1}$ ist der Abschluß der Menge $\mathcal{L}_n \cup \{\mathbf{SR}(g_1,\ldots,g_m,h_1,\ldots,h_m) : m \in \mathbb{N} \wedge g_i,h_i \in \mathcal{L}_n\}$ bezüglich Substitution.*

Lemma 3.9: *Für $n \geq 2$ ist $\mathcal{L}_n$ abgeschlossen bezüglich beschränkter simultaner Rekursion.*

3.1.1 Programme und Funktionen der Schachtelungstiefe $\leq i$

$$\mathbb{L}_i := \left\{ \begin{array}{ll} \textbf{INPUT } X_1,\ldots,X_m & \\ P & : d_L(\boxed{P}) \leq i \\ \textbf{OUTPUT } Y & \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{L}_i := \{ f : f \in \mathcal{PR} \wedge \exists \mathbb{P}(\mathbb{P} \in \mathbb{L}_i \wedge \mathbb{P} \text{ berechnet } f)\}$$

Eigenschaft 3.1: *$\mathcal{L}_i$ ist abgeschlossen bezüglich Substitution.*

3.1.2 Wachstumsfunktionen

$$\begin{array}{rcl} t_0(x) & := & x+2 \\ t_{n+1}(0) & := & 1 \quad \text{und} \quad t_{n+1}(x+1) := t_n(t_{n+1}(x)) \ \text{ d.h.} \\ t_{n+1}(x) & := & t_n^x(1) = \underbrace{t_n \circ \cdots \circ t_n}_{x \text{ mal}}(1) \end{array}$$

Eigenschaft 3.2: *Es gelten $t_n \in \mathcal{L}_n$, sowie die Ungleichungen*

$$t_n(x) \geq x+1 \qquad (3.2.1)$$

$$t_n(x+1) > t_n(x) \qquad (3.2.2)$$

$$t_{n+1}(x) \geq t_n(x) \quad \textit{, falls } x+n>0 \qquad (3.2.3)$$

$$t_n^{k+1}(x) \geq 2 \cdot t_n^k(x) \quad \textit{, falls } n>0 \qquad (3.2.4)$$

$$t_n^{k+1}(x) \geq t_n^k(x)+x \quad \textit{, falls } n>0 \qquad (3.2.5)$$

Satz 3.3: *Ist $f \in \mathcal{L}_n$, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ derart, dass*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m(f(x_1,\ldots,x_m) \leq t_n^k(\max\{x_1,\ldots,x_m\}))\ .$$

4 Eine effektive Numerierung von $\mathcal{PR}^1$

$$\mathbf{P}(m) := \begin{array}{l} \textbf{INPUT } X_0 \\ p(m) \\ \textbf{OUTPUT } X_1 \end{array} \quad \text{, wobei}$$

$$\begin{array}{lcllr}
p(c(n,c(i,j))) & := & X_i = X_j & \text{falls } n = 0 & \pmod 5 \\
p(c(n,i)) & := & X_i = 0 & \text{falls } n = 1 & \pmod 5 \\
p(c(n,i)) & := & X_i = X_i + 1 & \text{falls } n = 2 & \pmod 5 \\
p(c(n,c(i,j))) & := & \begin{array}{l} p(i) \\ p(j) \end{array} & \text{falls } n = 3 & \pmod 5 \\
p(c(n,c(i,j))) & := & \begin{array}{l} \textbf{LOOP } X_i \\ p(j) \\ \textbf{END} \end{array} & \text{falls } n = 4 & \pmod 5
\end{array}$$

$$f_m(x) := f_{\mathbf{P}(m)}(x)$$

$$\Phi(m,x) := f_m(x)$$

Lemma 4.1:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{PR}^1 & = & \{ f_m : m \in \mathbb{N} \} \\
\mathcal{PR}^k & = & \{ \mathbf{S}(f_m ; c^{(k)}) : m \in \mathbb{N} \}
\end{array}$$

Lemma 4.2: *Die Funktion Φ ist berechenbar, aber nicht primitiv-rekursiv.*

3.3 Die Grzegorczyk-Hierarchie

$E_2(x) := x^2 + 2$ bzw. $E_n(0) := 2$ und $E_n(x+1) := E_{n-1}(E_n(x))$

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{E}^n & := & \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i^n, \text{ wobei } \mathcal{A}_0^n := \mathcal{A}^0 \cup \{E_1, E_n\} \\
\mathcal{A}_{i+1}^n & := & \mathcal{A}_i^n \cup \{ \mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k) : k \in \mathbb{N} \wedge f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{A}_i^n \} \\
 & & \cup \{ \mathbf{BR}(g,h;b) : g,h,b \in \mathcal{A}_i^n \} \text{ für } n \geq 3
\end{array}$$

Lemma 3.10: *Für jedes $f \in \mathcal{E}^n$, $(n \geq 2)$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $f(x_1, \ldots, x_m) \leq E_n^k(\max\{x_1, \ldots, x_m\})$.*

Lemma 3.11: *Sind $g, h \in \mathcal{E}^i$ $(i \neq 1)$, so gilt $\mathbf{R}(g,h) \in \mathcal{E}^{i+1}$.*

Lemma 3.12: *Ist $n \geq 3$, so wird $\mathcal{E}^n$ mit Hilfe von Substitution und beschränkter primitiver Rekursion schon aus $\mathcal{A}_0 \cup \{E_1, t_{n-1}\}$ erzeugt.*

Folgerung 3.13: *Für $n \geq 2$ gilt $\mathcal{E}^{n+1} \subseteq \mathcal{L}_n$.*

Folgerung 3.14: *Für $n \geq 2$ gilt: Entstehen die Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ durch simultane Rekursion aus $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{E}^n$, so sind $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{E}^{n+1}$.*

Folgerung 3.15: *$\mathcal{E}^{n+1} \supseteq \mathcal{L}_n$ für $n \geq 0$.*

Satz 3.16: *Für $n \geq 2$ gilt $\mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{L}_n$.*