1 Primitiv-rekursive Funktionen

Bezeichnung: $\mathcal{F}^k := \{ f : f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}\}$ für die Menge aller k-stelligen Funktionen

1.1 Berechnungsschemata für Funktionen

1.1.1 Substitution $\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k)\colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$

Es seien $f \in \mathcal{F}^k, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{F}^m$.

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k)(x_1, \ldots, x_m) \quad &:= \\ f(g_1(x_1, \ldots, x_m) \quad, \ldots, \quad & g_k(x_1, \ldots, x_m))\end{aligned}$$

1.1.2 Primitive Rekursion $\mathbf{R}(g,h)\colon \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$

Es seien $g \in \mathcal{F}^m$ und $h \in \mathcal{F}^{m+2}$.
$\vec{x} := (x_1, \ldots, x_m)$ sei der *Parametervektor*.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(g,h)(\vec{x}, 0) \quad &:= \quad g(\vec{x}) \\ \mathbf{R}(g,h)(\vec{x}, n+1) \quad &:= \quad h(\vec{x}, n, \mathbf{R}(g,h)(\vec{x}, n))\end{aligned}$$

1.1.3 Beschränkte Primitive Rekursion $\mathbf{BR}(g,h;b)\colon \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$

Es seien $g \in \mathcal{F}^m$, $h \in \mathcal{F}^{m+2}$ und $b \in \mathcal{F}^{m+1}$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_{m+1})$.

$$\mathbf{BR}(g,h;b) = \begin{cases} \mathbf{R}(g,h) & , \text{ falls } \forall \vec{y}(\mathbf{R}(g,h)(\vec{y}) \leq b(\vec{y})), \\ \emptyset & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

1.1.4 Induktiver Aufbau der primitiv-rekursiven Funktionen

Anfangsfunktionen

$$\mathcal{A}_0 := \{o, s\} \cup \{I_k^m : m, k \in \mathbb{N} \land k \leq m\}$$

induktiver Aufbau

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{i+1} := \mathcal{A}_i \quad &\cup \quad \{\mathbf{S}(f; g_1, \ldots, g_k) : k \in \mathbb{N} \land f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{A}_i\} \\ &\cup \quad \{\mathbf{R}(g,h) : g, h \in \mathcal{A}_i\}\end{aligned}$$

Abschluß

$$\mathcal{PR} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$$

Satz 1.1: *Primitiv-rekursive Funktionen sind vollständig definierte Funktionen*

Eigenschaft 1.2: *Die Klasse $\mathcal{PR}$ ist abgeschlossen bezüglich*

(a) Permutation von Variablen,

(b) Identifizierung von Variablen,

(c) Einsetzung von Konstanten, und

(d) Einführung fiktiver Variablen.

1.1.5 Minimale Nullstelle (Minimisierung $f = \mathbf{M}g$)

Es seien $g \in \mathcal{F}^{m+1}$ und $\vec{x} \in \mathbb{N}^m$.

$$f(\vec{x}) := \mu t(g(\vec{x},t) = 0) \text{ , wobei}$$

$$\mu t(g(\vec{x},t) = 0) := \begin{cases} \min\{z : g(\vec{x},z) = 0 \wedge \forall i \leq z(g(\vec{x},i) \in \mathbb{N})\} & \text{, falls ex., und} \\ \text{nicht definiert} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Beschränkte Minimisierung ($f = \mathbf{M}_{\leq} g$)

Es seien $g \in \mathcal{F}^{m+1}$ und $\vec{x} \in \mathbb{N}^m$.

$$f(\vec{x},y) := (\mu t \leq y)(g(\vec{x},t) = 0) \text{ , wobei}$$

$$(\mu t \leq y)(g(\vec{x},t) = 0) := \begin{cases} \mu t(g(\vec{x},t) = 0), & \text{falls } \mu t(g(\vec{x},t) = 0) \leq y \text{ , und} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Satz 1.7: *Ist $g \in \mathcal{PR}$, so gilt auch $\mathbf{M}_{\leq} g \in \mathcal{PR}$.*

Beispiele primitiv rekursiver Funktionen 1

$$\begin{aligned} quot(x,y) &:= \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor & \text{, falls } y > 0 \text{ ,} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases} \\ rest(x,y) &:= x \dot{-} y \cdot quot(x,y) \end{aligned}$$

Lemma 1.3 (Beschränkte Summation): *Ist $g(x_1,\ldots,x_m) \in \mathcal{PR}$, so ist auch*

$$f(x_1,\ldots,x_m) := \sum_{i=0}^{x_m} g(x_1,\ldots,x_{m-1},i) \in \mathcal{PR} \text{ .}$$

Folgerung 1.4: *Sind g, h, j primitiv-rekursive m-stellige Funktionen,*

so ist auch

$$f(x_1,\ldots,x_m) := \sum_{i=h(x_1,\ldots,x_m)}^{j(x_1,\ldots,x_m)} g(x_1,\ldots,x_{m-1},i) \in \mathcal{PR} \text{ .}$$

Lemma 1.5 (Beschränkte Multiplikation): *Ist $g(x_1,\ldots,x_m) \in \mathcal{PR}$,*

so ist auch

$$f(x_1,\ldots,x_m) := \prod_{i=0}^{x_m} g(x_1,\ldots,x_{m-1},i) \in \mathcal{PR} \text{ .}$$

Satz 1.6 (Fallunterscheidung): *Sind $f_1,\ldots,f_{n+1},\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathcal{F}^m \cap \mathcal{PR}$ und sind die Mengen der Nullstellen der Funktionen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ paarweise disjunkt, so ist auch die Funktion*

$$f(\vec{x}) := \begin{cases} f_1(\vec{x}) & , \text{ falls } \alpha_1(\vec{x}) = 0, \\ \vdots & , \vdots \\ f_n(\vec{x}) & , \text{ falls } \alpha_n(\vec{x}) = 0, \text{ und} \\ f_{n+1}(\vec{x}) & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

$(\vec{x} \in \mathbb{N}^m)$ primitiv-rekursiv.

1.1.7 Simultane Rekursion

Es seien $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{F}^k$ und $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{F}^{k+1+m}$. Die Funktionen $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}^{k+1}$ entstehen durch simultane Rekursion $:\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
f_i(\vec{x}, 0) &:= g_i(\vec{x}) \\
f_i(\vec{x}, n+1) &:= h_i(\vec{x}, n, f_1(\vec{x}, n), \dots, f_m(\vec{x}, n))
\end{aligned}
$$

für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$.

Satz 1.9 (Satz über die simultane Rekursion): *Sind die Funktionen $g_i \in \mathcal{F}^k$ und $h_i \in \mathcal{F}^{k+1+m}$ primitiv rekursiv und entstehen die f_i aus ihnen mittels simultaner Rekursion, so sind auch alle f_i primitiv rekursiv.*

Beispiele primitiv rekursiver Funktionen 2

$$
\begin{aligned}
prim(x) &:= \begin{cases} 0 \text{ , falls } x \text{ Primzahl ist,} \\ 1 \text{ , sonst.} \end{cases} \\
nd(x) &:= \begin{cases} \mathrm{Anz}\{y : y \in \mathbb{N} \wedge y | x\} \text{ , falls } x \neq 0 \text{ ,} \\ 1 \text{ , sonst.} \end{cases} \\
p(x) &:= (x+1)\text{-te Primzahl} \quad (p(0) = 2,\ p(1) = 3,\ p(2) = 5, \dots) \\
len(x) &:= \begin{cases} \max\{y : y \in \mathbb{N} \wedge p(y) | x\} \text{ , falls } x \neq 0 \text{ ,} \\ 0 \text{ , sonst.} \end{cases} \\
exp(x,y) &:= \begin{cases} \min\{t : t \in \mathbb{N} \wedge p(y)^t | x \wedge p(y)^{t+1} \not| x\} \text{ , falls } x \neq 0 \text{ ,} \\ 0 \text{ , sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.1.6 Werteverlaufsrekursion

Es seien $\alpha_1(x), \dots, \alpha_\ell(x)$ Funktionen, für welche $\alpha_i(x+1) \leq x$ gilt.

Die Funktion $f(x_1, \dots, x_{m+1})$ entsteht aus den Funktionen $g(x_1, \dots, x_m)$ und $h(x_1, \dots, x_m, y, z_1, \dots, z_\ell)$ mittels durch $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ bestimmter Werteverlaufsrekursion $:\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}, 0) &:= g(\vec{x}) \\
f(\vec{x}, n+1) &:= h(\vec{x}, n, f(\vec{x}, \alpha_1(n+1)), \dots, f(\vec{x}, \alpha_\ell(n+1)))
\end{aligned}
$$

für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$.

Satz 1.8 (Satz über die Werteverlaufsrekursion): *Sind die Funktionen $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathcal{F}^1$ mit $\alpha_i(x+1) \leq x$, sowie $g \in \mathcal{F}^m$ und $h \in \mathcal{F}^{m+1+\ell}$ primitiv rekursiv und entsteht f aus ihnen mittels Werteverlaufsrekursion, so ist auch f primitiv rekursiv.*