

Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger
Dipl.-Math. S. Schwarz

D-06120 HALLE (Saale)
Von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714
Tel. 0345/55 24715

9. Übung zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“

Wintersemester 2003/04

16. Dezember 2003

Abgabe: **Donnerstag, den 8. Januar 2004** vor der Vorlesung

Achtung: Alle Lösungen sind zu **begründen** bzw. zu **beweisen**!

Aufgabe 9.1: (5 Punkte)

Zeigen Sie, daß in jedem endlichen planaren Graphen (V, E) eine Ecke $v \in V$ vom Grad ≤ 5 existiert!

Aufgabe 9.2: (4 Punkte)

Bestimmen Sie für die Graphen C_4 , C_5 , M_3 (siehe Aufgabe S8.2) und Q_3 (siehe Aufgabe S9.1) den maximalen Knotengrad Δ , die chromatische Zahl χ und die Größe ω der maximalen Clique!

Aufgabe 9.3: (4 Punkte)

Zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ wird die Relation $\equiv_n \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert:

$a \equiv_n b$ gilt genau dann, wenn $n \mid (a - b)$.

Zeigen Sie, daß für jede Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ die Relation $\equiv_n$ eine Kongruenzrelation auf der Algebra $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ ist!

Aufgabe 9.4: (4 Punkte)

Zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ werden die Menge $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ und die Funktion $\text{mod } n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ definiert, die jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ die kleinste nichtnegative Zahl $a \bmod n = b$ zuordnet, für die $a \equiv_n b$ gilt.

Außerdem werden die folgenden Funktionen definiert:

$$\begin{aligned} +_n : \mathbb{Z}_n^2 &\longrightarrow \mathbb{Z}_n & \text{durch } a +_n b &= (a + b) \bmod n \\ \cdot_n : \mathbb{Z}_n^2 &\longrightarrow \mathbb{Z}_n & \text{durch } a \cdot_n b &= (ab) \bmod n \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die Abbildung $\text{mod } n$ für jede Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ein Homomorphismus von $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ nach $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n, 0, 1)$ ist!

Selbsttestaufgaben (ohne Bewertung)

Selbsttest-Aufgabe S9.1:

Der Graph $Q_n = (V, E)$ mit $V = \{0, 1\}^n$, in dem genau dann $\{u, v\} \in E$ gilt, wenn sich die Wörter $u = u_1, u_2, \dots, u_n$ und $v = v_1 v_2 \dots v_n$ an genau einer Position $i \in \{1, \dots, n\}$ unterscheiden, wird *n-dimensionaler Würfel* genannt.

- (a) Zeichnen Sie Q_n für alle $n \leq 4$.
- (b) Wieviele Ecken und Kanten hat der Q_n ?
- (c) Für welche n existiert ein Eulerkreis im Q_n ?
- (d) Für welche n ist der Q_n ein paarer Graph?
- (e) Bestimmen Sie die chromatische Zahl $\chi(Q_n)$!
- (f) Bestimmen Sie die maximale Größe $\omega(Q_n)$ einer Clique im Q_n !

Selbsttest-Aufgabe S9.2:

Zeigen Sie, daß das Komplement eines planaren Graphen mit mindestens 11 Knoten nicht planar ist!

Selbsttest-Aufgabe S9.3:

Für welche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gelten die beiden Kongruenzen $27 \equiv_n 5$ und $100 \equiv_n 1$?

Selbsttest-Aufgabe S9.4:

Zeigen Sie:

- (a) für gerade Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^2 \equiv_4 0$,
- (b) für ungerade Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^2 \equiv_8 1$.

Die Folien und weitere Hinweise zur Vorlesung finden Sie online unter

<http://nirvana.informatik.uni-halle.de/~theo/Grundl/grundl.html>.

Die Übungsaufgaben finden Sie unter

<http://nirvana.informatik.uni-halle.de/~theo/Grundl/uebungen.html>.

Email: {staiger,schwarzs}@informatik.uni-halle.de