

Institut für Informatik  
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg  
Prof. Dr. L. Staiger  
Dipl.-Math. S. Schwarz

D-06120 HALLE (Saale)  
Von-Seckendorff-Platz 1  
Tel. 0345/55 24714  
Tel. 0345/55 24715

5. Übung zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“  
Wintersemester 2003/04 11. November 2003

---

Abgabe: Dienstag, den 18. November 2003 vor der Vorlesung

---

Achtung: Alle Lösungen sind zu **begründen** bzw. zu **beweisen**!

**Aufgabe 5.1:** (2+2+2 Punkte)

Wieviele Wörter aus den Buchstaben  $\{a_1, \dots, a_n\}$  für  $n \geq 6$ , in denen jeder Buchstabe genau einmal vorkommt, enthalten

- (a) die Zeichenkette  $a_1a_2$  nicht?
- (b) keine der Zeichenketten  $a_1a_2$  und  $a_2a_3$ ?
- (c) mindestens eine der Zeichenketten  $a_1a_2a_3$ ,  $a_3a_4a_5$  und  $a_5a_6a_7$  ?

**Aufgabe 5.2:** (3 Punkte)

Beweisen Sie, daß für alle Zahlen  $k, m, n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\gcd(kn, km) = k \cdot \gcd(n, m)$$

**Aufgabe 5.3:** (2+2 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Eulersche  $\varphi$ -Funktion die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (a) für jede ungerade Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\varphi(2n) = \varphi(n)$
- (b) für jede gerade Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$

**Aufgabe 5.4:** (3 Punkte)

Geben Sie eine Zahl  $m < 55$  an, für die zur Berechnung von  $\gcd(55, m)$  genau 8 Schritte des euklidischen Algorithmus notwendig sind.

## Selbsttestaufgaben (ohne Bewertung)

### Selbsttest-Aufgabe S5.1:

Berechnen Sie die Werte  $\varphi(n)$  der Eulerschen  $\varphi$ -Funktion für alle Zahlen  $n \in \{1, \dots, 30\}$ !

### Selbsttest-Aufgabe S5.2:

Von 18 Studenten studieren 10 Informatik, 10 Biologie und 7 Mathematik. Fünf Studenten studieren sowohl Informatik als auch Biologie. Drei Studenten studieren sowohl Informatik als auch Mathematik. Ein Student studiert sogar alle drei Richtungen. Wieviele der 18 Studenten studiert keines der drei Fächer?

### Selbsttest-Aufgabe S5.3:

Für wieviele Zahlen  $n$  aus der Menge  $\{1, \dots, 120\}$  gilt  $\gcd(120, n) \neq 1$ ?

### Selbsttest-Aufgabe S5.4:

Zeigen Sie, daß für jede Zahl  $n \geq 3$  die Menge  $\{n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n\}$  keine Primzahl enthält!

---

## Literaturhinweise

*H. Freund*: Elemente der Zahlentheorie (Teubner 1979)

*Ekkehard Krätzel*: Zahlentheorie (Dt. Verl. der Wissenschaften, 1981)

*Werner Winzen*: Grundbegriffe der elementaren Zahlentheorie (Shaker, 1997)

*John Stillwell*: Elements of number theory (Springer, 2003)

---

Die Folien und weitere Hinweise zur Vorlesung finden Sie online unter

<http://nirvana.informatik.uni-halle.de/~theo/Grundl/grundl.html>.

Die Übungsaufgaben finden Sie unter

<http://nirvana.informatik.uni-halle.de/~theo/Grundl/uebungen.html>.

Email: {staiger, schwarzs}@informatik.uni-halle.de