Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger
Dipl.-Math. S. Schwarz

D–06120 Halle (Saale)
Von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714
Tel. 0345/55 24715

12.Übung zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“

Wintersemester 2003/04 — 20. Januar 2004

Abgabe: **Dienstag, den 27.Januar 2004** vor der Vorlesung

Achtung: Alle Lösungen sind zu **begründen** bzw. zu **beweisen**!

Aufgabe 12.1: (3 Punkte)

a. Welche Interpretationen erfüllen die Formelmenge
$\Phi = \{a \to ((\neg b \vee c) \wedge (b \vee \neg c))\}$
b. Welche Interpretationen erfüllen die Formelmenge $\Psi = \Phi \cup \{\neg c\}$?
c. Geben Sie eine Formel φ an, welche das Atom a nicht enthält, so daß $\neg a$ aus $\Psi \cup \{\varphi\}$ folgerbar ist!

Für zwei aussagenlogische Formeln φ und ψ wird genau dann $\varphi \sim \psi$ geschrieben, wenn φ und ψ *semantisch äquivalent* sind (siehe Definition 4.6 in der Vorlesung).

Aufgabe 12.2: (6 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

a. $(\neg a \vee b) \wedge (a \vee b) \sim b$
b. $(\neg a \vee b) \wedge (a \vee b) \models b$
c. $(a \to b) \wedge (b \to c) \sim (a \vee b \to c)$
d. $(a \to b) \wedge (b \to c) \models (a \vee b \to c)$
e. $a \wedge (a \to b) \sim b$
f. $a \wedge (a \to b) \models b$

Aufgabe 12.3: (2 Punkte)

Finden Sie eine aussagenlogische Formel mit Atomen aus der Menge $\{A_1, \ldots, A_4\}$, die von allen Interpretationen erfüllt wird, unter denen mindestens zwei der Atome falsch sind!
Geben Sie zu dieser Formel je eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform und in konjunktiver Normalform an!

Aufgabe 12.4: (5 Punkte)

Die erfüllenden Belegungen β einer aussagenlogischen Formel φ werden *Modelle* der Formel φ genannt. Die Menge aller Modelle der Formel φ wird mit $\mathsf{Mod}(\varphi) = \{\beta : \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \{0,1\} \mid \mathfrak{I}_\beta(\varphi) = 1\}$ bezeichnet.
Für Mengen Φ von Formeln wird $\mathsf{Mod}(\Phi) = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathsf{Mod}(\varphi)$ definiert.
Zeigen Sie, daß für jede endliche Menge $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ aussagenlogischer Formeln gilt: $\mathsf{Mod}(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) = \mathsf{Mod}(\Phi)$.

Selbsttestaufgaben (ohne Bewertung)

Selbsttest-Aufgabe S12.1:

Zeigen Sie, daß die in der Vorlesung definierte Relation der *semantischen Äquivalenz* (Definition 4.6) eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller aussagenlogischen Formeln ist!
In wieviele Äquivalenzklassen wird die Menge aller aussagenlogischen Formeln mit Atomen aus der Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$ durch diese Äquivalenzrelation eingeteilt?

Selbsttest-Aufgabe S12.2:

Zeigen Sie, daß die aussagenlogische Formel $\varphi \rightarrow \psi$ genau dann eine Tautologie ist, wenn $\mathsf{Mod}(\varphi) \subseteq \mathsf{Mod}(\psi)$ gilt!

Selbsttest-Aufgabe S12.3:

Zeigen Sie, daß für jede Menge Φ aussagenlogischer Formeln und alle Formeln φ, ψ aus $\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \wedge \neg\psi$ folgt $\Phi \models \neg\varphi$!

Selbsttest-Aufgabe S12.4:

Geben Sie für die prädikatenlogische Formel $\varphi = \forall x \exists y (p(x, y) \wedge \neg p(y, x))$

a. je eine endliche und eine unendliche Struktur A an, die ein Modell für φ ist und

b. eine Struktur B an, die kein Modell für φ ist!

Literaturhinweise:

Schönig, Uwe: Logik für Informatiker
(Heidelberg, Berlin: Spektrum 2000)
Heinemann, Bernhard und *Weihrauch, Klaus*: Logik für Informatiker
(Stuttgart : Teubner, 1980)

Die Folien und weitere Hinweise zur Vorlesung finden Sie online unter
`http://nirvana.informatik.uni-halle.de/~theo/Grundl/grundl.html`.
Die Übungsaufgaben finden Sie unter
`http://nirvana.informatik.uni-halle.de/~theo/Grundl/uebungen.html`.
Email: `{staiger,schwarzs}@informatik.uni-halle.de`