Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger
Dipl.-Math. S. Schwarz

D–06120 Halle (Saale)
Von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714
Tel. 0345/55 24715

11.Übung zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“

Wintersemester 2003/04 13. Januar 2004

Abgabe: **Dienstag, den 20. Januar 2004** vor der Vorlesung

Achtung: Alle Lösungen sind zu **begründen** bzw. zu **beweisen**!

Eine Algebra (A, Ω) heißt genau dann *Unteralgebra* der Algebra (B, Ω), wenn $A \subseteq B$ gilt und A unter allen Funktionen $f \in \Omega$ abgeschlossen ist (d.h. für jede Funktion $f : B^n \longrightarrow B$ folgt $f(a_1, \ldots, a_n) \in A$ aus $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A^n$).
Eine Gruppe $(G, \cdot, ^{-1}, \varepsilon)$ heißt genau dann *Untergruppe* der Gruppe $(H, \cdot, ^{-1}, \varepsilon)$, wenn $G \subseteq H$ gilt und $(G, \cdot, ^{-1}, \varepsilon)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 11.1: (4 Punkte)

Die Menge $\mathbb{Q}^+$ aller positiven rationalen Zahlen bildet zusammen mit der Multiplikation $\cdot$ und der Reziprokenbildung $a^{-1} = \frac{1}{a}$ die Gruppe $(\mathbb{Q}^+, \cdot, ^{-1}, 1)$.

a. Geben Sie eine Menge $A \subseteq \mathbb{Q}^+$ an, so daß die Algebra $(A, \{\cdot, 1\})$ eine Unteralgebra der Algebra $(\mathbb{Q}^+, \{\cdot, 1\})$, aber keine Gruppe ist!
b. Geben Sie eine Menge $A \subseteq \mathbb{Q}^+$ an, so daß die Algebra $(A, \{^{-1}, 1\})$ eine Unteralgebra der Algebra $(\mathbb{Q}^+, \{^{-1}, 1\})$, aber die Algebra $(A, \{\cdot, ^{-1}, 1\})$ keine Gruppe ist!
c. Zeigen Sie, daß für jede Menge $A \subseteq \mathbb{Q}^+$, für welche $(A, \{\cdot, ^{-1}\})$ eine Unteralgebra der Algebra $(\mathbb{Q}^+, \{\cdot, ^{-1}\})$ ist, auch $(A, \cdot, ^{-1}, 1)$ eine Untergruppe der Gruppe $(\mathbb{Q}^+, \cdot, ^{-1}, 1)$ ist!

Aufgabe 11.2: (4 Punkte)

Zu jeder Untergruppe $(H, \cdot, ^{-1}, \varepsilon)$ einer endlichen Gruppe $(G, \cdot, ^{-1}, \varepsilon)$ wird die Relation $\sim_H \subseteq G \times G$ definiert:
$a \sim_H b$ gilt genau dann, wenn ein $h \in H$ existiert, so daß $a \cdot h = b$ gilt.
a. Zeigen Sie, daß $\sim_H$ eine Äquivalenzrelation auf der Gruppe $(G, \cdot, ^{-1}, \varepsilon)$ ist!
b. Zeigen Sie, daß alle Äquivalenzklassen $[a]_{\sim_H}$ gleichmächtig sind!

Aufgabe 11.3: (4 Punkte)

Sei $f : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus zwischen den Gruppen $(G, \cdot, ^{-1}, \varepsilon_G)$ und $(H, \circ, ^{-1}, \varepsilon_H)$. Zeigen Sie, daß die Menge $K = \{a \in G \mid f(a) = \varepsilon_H\}$ eine Untergruppe $(K, \cdot, ^{-1}, \varepsilon_G)$ der Gruppe $(G, \cdot, ^{-1}, \varepsilon_G)$ bildet!

Aufgabe 11.4: (4 Punkte)

Sei (wie in Aufgabe 11.3.) $f : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus zwischen den Gruppen $(G, \cdot, ^{-1}, \varepsilon_G)$ und $(H, \circ, ^{-1}, \varepsilon_H)$ und $K = \{a \in G \mid f(a) = \varepsilon_H\}$.
Zeigen Sie, daß für solche Untergruppen $(K, \cdot, ^{-1}, \varepsilon_G)$ die in Aufgabe 11.2 definierte Relation $\sim_K$ sogar eine Kongruenzrelation ist!

Selbsttestaufgaben (ohne Bewertung)

Selbsttest-Aufgabe S11.1:

Zeigen Sie, daß für alle ungeraden Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i \equiv_n 0$

Gilt diese Kongruenz auch für gerade Zahlen n?

Selbsttest-Aufgabe S11.2:

Finden Sie für jede der folgenden Kongruenzen die kleinsten nichtnegativen Zahlen n, die diese Kongruenzen erfüllen:

a. $6! \equiv_7 n$
b. $10! \equiv_{11} n$
c. $12! \equiv_{13} n$
d. $16! \equiv_{17} n$

Was bemerkt man dabei? Beweisen Sie Ihre Beobachtung!

Selbsttest-Aufgabe S11.3:

Bestimmen Sie alle Untergruppen der (in der Übungsserie 9) definierten Permutationsgruppe P_3!
Wieviele davon sind kommutativ?

Selbsttest-Aufgabe S11.4:

Bestimmen Sie eine Permutation x, so daß $\left(H, \circ, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$ mit

$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, x \right\}$

eine Untergruppe der Permutationsgruppe $\left(P_4, \circ, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$ ist!

Gelten die Kongruenzen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim_H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$?

(für die Definition von $\sim_H$ siehe Aufgabe 11.4)

Email: `{staiger,schwarzs}@informatik.uni-halle.de`