Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger
Dipl.-Math. S. Schwarz

D–06120 Halle (Saale)
Von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714
Tel. 0345/55 24715

10.Übung zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“

Wintersemester 2003/04 8. Januar 2004

Abgabe: **Dienstag, den 13. Januar 2004** vor der Vorlesung

Achtung: Alle Lösungen sind zu **begründen** bzw. zu **beweisen**!

Aufgabe 10.1: (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß für eine positive Zahl n genau dann

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \equiv_n 0 \quad \text{gilt, wenn } n \equiv_6 1 \text{ oder } n \equiv_6 -1 \text{ gilt.}$$

Aufgabe 10.2: (2 Punkte)

Geben sie eine Menge M möglichst kleiner positiver *ungerader* Zahlen an, welche für jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ *genau eine* Zahl $m \in M$ mit $m \equiv_{13} n$ enthält.

Eine Permutation der Menge $M_n = \{1, \ldots, n\}$ ist eine eineindeutige Abbildung $p : M_n \longrightarrow M_n$. Die Notation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i & j & \ldots & k \end{pmatrix}$ bezeichnet die Permutation $p : M_n \longrightarrow M_n$, mit $p(1) = i, p(2) = j, \ldots, p(n) = k$.
Die Menge aller Permutationen der Menge M_n wird mit P_n bezeichnet.
Für jede positive Zahl n ist die algebraische Struktur $(P_n, \circ, e_n)$ eine Gruppe, wobei die Funktion $\circ$ definiert ist durch

$\circ : P_n \times P_n \longrightarrow P_n$ so daß für jedes Element $a \in M_n$ gilt: $p \circ q(a) = q(p(a))$

Aufgabe 10.3: (6 Punkte)

a. Welche Permutation ist das neutrale Element $e_n \in P_n$? (1 Punkt)

b. Wieviele Elemente hat die Menge P_3? (1 Punkt)

c. Stellen Sie die Verknüpfung $\circ$ auf der Menge P_3 in einer Tafel dar und zeigen Sie damit, daß die Operation $\circ$ assoziativ ist! (2 Punkte)

d. Welches sind die inversen Elemente der Permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$? (je 1 Punkt)

Aufgabe 10.4: (5 Punkte)

a. Ist die Operation $\circ$ auf der Menge P_3 kommutativ? (1 Punkt)

b. Geben Sie eine Menge $G \subseteq P_3$ von Permutationen mit $1 < |G| < |P_3|$ an, so daß $(G, \circ, e_3)$ eine kommutative Gruppe ist.
Stellen Sie die Gruppentafel dieser Gruppe auf! (2 Punkte)

c. Definieren Sie eine Operation $\diamond : G^2 \longrightarrow G$, so daß die Struktur $(G, \circ, \diamond, e_3)$ ein Ring ist. (2 Punkte)

Literaturhinweise:

Hennig, Dirk: Lineare Algebra und algebraische Strukturen für Informatiker (Aachen : Shaker, 2002)
Simm, Günter und *Gonska, Heinz H.*: Algebraische Strukturen (Stuttgart : Teubner, 1980)
Herbert Lugowski: Grundzüge der universellen Algebra (Leipzig : Teubner, 1976)
Thomas Ihringer: Allgemeine Algebra (Stuttgart : Teubner, 1993)

Die Folien und weitere Hinweise zur Vorlesung finden Sie online unter
`http://nirvana.informatik.uni-halle.de/~theo/Grundl/grundl.html`.
Die Übungsaufgaben finden Sie unter
`http://nirvana.informatik.uni-halle.de/~theo/Grundl/uebungen.html`.
Email: `{staiger,schwarzs}@informatik.uni-halle.de`