5 Prädikatenlogik

5.1 Syntax der Prädikatenlogik

Terme

Variablensymbole: $v_0, v_1, \ldots$

Konstantensymbole: $c_0, c_1, \ldots$

Funktionssymbole: $f_0^{(n)}, f_1^{(n)}, \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots)$

Definition 5.1 [Induktive Definition der Terme]

1. Induktionsanfang v_i, c_i sind Terme.

2. Induktionsschritt Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und ist $f_j^{(n)}$ Funktionssymbol, so ist auch $f_j^{(n)} t_1 \ldots t_n$ ein Term.

3. Abschluß Eine Zeichenreihe ist nur dann ein Term, wenn dies auf Grund von 1. oder 2. der Fall ist.

Ausdrücke

Relationensymbole: $\equiv$ und $R_0^{(n)}, R_1^{(n)}, \ldots\ (n = 1, 2, \ldots)$

Junktoren: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Quantoren: $\exists, \forall$

Klammern: $(,)$

Definition 5.2 [Induktive Definition der Ausdrücke]

1. Induktionsanfang Sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme und ist $R_j^{(n)}$ ein Relationensymbol, so sind $\equiv t_1 t_2$ und $R_j^{(n)} t_1 \ldots t_n$ Ausdrücke.

2. Induktionsschritt Sind φ_1, φ_2 Ausdrücke und ist ν ein Variablensymbol, so sind auch $\neg\varphi_1$, $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ und $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ sowie $\exists\nu\varphi_1$ und $\forall\nu\varphi_1$ Ausdrücke.

3. Abschluß Eine Zeichenreihe ist nur dann ein Ausdruck, wenn dies auf Grund von 1. oder 2. der Fall ist.

5.2 Semantik der Prädikatenlogik

Wir nennen eine Teilmenge der Menge aller Konstanten-, Funktions-und Prädikatensymbole eine *Signatur*, d.h. Σ ist *Signatur*, falls

$$\begin{aligned}\Sigma &\subseteq \{c_i : i \in \mathbb{N}\}\\ &\quad \cup \{f_i^{(n)} : i, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}\\ &\quad \cup \{R_i^{(n)} : i, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}\,.\end{aligned}$$

Definition 5.3 Eine Σ-*Struktur* ist ein Paar $\mathfrak{A} = (M, \mathfrak{a})$, falls

1. $M \neq \emptyset$ eine Menge ist,
2. $\mathfrak{a} : \Sigma \to M \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \{f : f$ ist i-stellige Funktion von M in $M\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \{R : R$ ist i-stellige Relation auf $M\}$,

   wobei gilt:

   (a) Ist c Konstante aus Σ, so ist $\mathfrak{a}(c) \in M$.

   (b) Ist $f^{(n)}$ Funktionssymbol aus Σ, so ist $\mathfrak{a}(f^{(n)})$ n-stellige Funktion von M in M (n-stellige Operation auf M).

   (c) Ist $R^{(n)}$ Relationssymbol aus Σ, so ist $\mathfrak{a}(R^{(n)})$ n-stellige Relation auf M.

Definition 5.4 [Belegung von Variablen]
Eine Abbildung $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \to M$ heißt *Belegung* der Variablen einer Σ-Struktur $\mathfrak{A}$.

Definition 5.5 [Σ-Interpretation]
Wir nennen das Paar $\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$, wobei β eine Belegung ist, eine Σ-*Interpretation*.

Schreibweisen Es sei $a \in M$.

$$\beta\frac{a}{v} := \begin{cases} \beta(y) & \text{, für } y \neq v \\ a & \text{, für } y = v \end{cases}$$

$$\mathfrak{I}\frac{a}{v} := (\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{v}) \text{, für } \mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$$

Ausdehnung von $\mathfrak{I}$ auf Terme

Definition 5.6

Für eine Variable v

$$\mathfrak{I}(v) := \beta(v)$$

Für eine Konstante c

$$\mathfrak{I}(c) := \mathfrak{a}(c)$$

Für einen zusammengestzten Term $f\,t_1 \ldots t_n$

$$\mathfrak{I}(f\,t_1 \ldots t_n) := \mathfrak{a}(f)\big(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)\big)$$

Definition 5.7 [Modellbeziehung]

$$\begin{array}{lcl}
\mathfrak{I} \models \ \equiv t_1 t_2 & \iff & \mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2) \\
\mathfrak{I} \models R t_1 \ldots t_n & \iff & \big(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)\big) \in \mathfrak{a}(R) \\
\mathfrak{I} \models \neg\varphi & \iff & \text{nicht } \mathfrak{I} \models \varphi \\
\mathfrak{I} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) & \iff & \mathfrak{I} \models \varphi_1 \text{ und } \mathfrak{I} \models \varphi_2 \\
\mathfrak{I} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2) & \iff & \mathfrak{I} \models \varphi_1 \text{ oder } \mathfrak{I} \models \varphi_2 \\
\mathfrak{I} \models (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) & \iff & \text{wenn } \mathfrak{I} \models \varphi_1 \text{ , so } \mathfrak{I} \models \varphi_2 \\
\mathfrak{I} \models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) & \iff & \mathfrak{I} \models \varphi_1 \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models \varphi_2 \\
\mathfrak{I} \models \exists v\varphi & \iff & \text{es gibt ein } a \in M \text{ mit } \mathfrak{I}\frac{a}{v} \models \varphi \\
\mathfrak{I} \models \forall v\varphi & \iff & \text{für alle } a \in M \text{ gilt } \mathfrak{I}\frac{a}{v} \models \varphi
\end{array}$$

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Definition 5.8 Eine Menge von Ausdrücken Φ heißt genau dann *erfüllbar*, wenn es eine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, die Modell aller Ausdrücke aus Φ ist, d.h. wenn $\mathfrak{I} \models \psi$ für alle $\psi \in \Phi$ gilt.

Definition 5.9 Es sei Φ eine Menge von Ausdrücken, und es sei φ ein Ausdruck. Wir sagen, φ *folgt* aus Φ (kurz: $\Phi \models \varphi$), falls jede Interpretation $\mathfrak{I}$, die Modell von Φ ist auch Modell von φ ist.

M.a.W., falls $\mathfrak{I} \models \psi$ für alle $\psi \in \Phi$ gilt, so muß auch $\mathfrak{I} \models \varphi$ gelten.

Definition 5.10 Ein Ausdruck φ heißt *allgemeingültig* (kurz: $\models \varphi$), falls $\emptyset \models \varphi$ gilt.

Lemma 5.1 *Für alle* Φ *und alle* φ *gilt genau dann* $\Phi \models \varphi$*, wenn* $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ***nicht*** *erfüllbar ist.*

Folgerung 5.2 *Ein Ausdruck* φ *ist genau dann allgemeingültig, wenn* $\neg\varphi$ ***nicht*** *erfüllbar ist.*

Lemma 5.3 [Koinzidenzlemma]
Es seien Σ_1, Σ_2 *Signaturen sowie* $\mathfrak{A}_1 = (M, \mathfrak{a}_1)$ *und* $\mathfrak{A}_2 = (M, \mathfrak{a}_2)$ *jeweils* Σ_1*- bzw.* Σ_2*-Strukturen mit derselben Trägermenge* M*, und es sei* $\Sigma := \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Für dazugehörige Interpretation $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ *und* $\mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ *gilt dann:*

1. *Ist* t *ein* Σ*-Term und stimmen* $\mathfrak{I}_1$ *und* $\mathfrak{I}_2$ *für die in* t *auftretenden Symbole überein, so ist* $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.
2. *Ist* φ *ein* Σ*-Ausdruck und stimmen* $\mathfrak{I}_1$ *und* $\mathfrak{I}_2$ *für die in* φ *auftretenden Symbole aus* Σ *und die in* φ frei *auftretenden Variablen überein, so gilt genau dann* $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$*, wenn* $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$ *gilt.*

Definition 5.11 Eine Menge von Ausdrücken Φ ist bezüglich einer Signatur Σ erfüllbar, falls alle Ausdrücke in Φ Σ-Ausdrücke sind und es eine Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt.

Folgerung 5.4 *Gilt $\Sigma \subseteq \Sigma'$, so ist eine Menge von Σ-Ausdrücken Φ genau dann bezüglich Σ erfüllbar, wenn Φ bezüglich Σ' erfüllbar ist.*

Lemma 5.5 [Isomorphielemma]
Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorphe Σ-Strukturen, so gilt für alle Σ-Sätze φ genau dann $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$ wenn $(\mathfrak{B}, \beta) \models \varphi$.

Definition 5.12 $\mathfrak{A} = (M, \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{B} = (N, \mathfrak{b})$ seien Σ-Strukturen. $\mathfrak{A}$ heißt *Substruktur* von $\mathfrak{B}$, falls

1. $M \subseteq N$
2. Für $R^{(n)} \in \Sigma$ ist $\mathfrak{a}(R^{(n)}) = \mathfrak{b}(R^{(n)}) \cap M^n$.
3. Für $f^{(n)} \in \Sigma$ ist $\mathfrak{a}(f^{(n)}) : M^n \to M$ die Einschränkung von $\mathfrak{b}(f^{(n)}) : N^n \to N$ auf M^n,
   d.h. $\mathfrak{a}(f^{(n)}) = \mathfrak{b}(f^{(n)}) \cap M^{n+1}$.
4. Für $c \in \Sigma$ ist $\mathfrak{a}(c) = \mathfrak{b}(c)$.

Lemma 5.6 *Es sei* $\mathfrak{A} = (M, \mathfrak{a})$ *Substruktur der* Σ*-Struktur* $\mathfrak{B} = (N, \mathfrak{b})$*, und es sei* $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \to M$*. Dann gelten für jeden* Σ*-Term* t *die Beziehung* $(\mathfrak{A}, \beta)(t) = (\mathfrak{B}, \beta)(t)$ *und für jeden quantorenfreien* Σ*-Ausdruck* φ *genau dann* $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$ *wenn* $(\mathfrak{B}, \beta) \models \varphi$.

Sequenzkalkül

Ableitungszeile

Eine *Sequenz* (oder *Ableitungszeile*) ist eine Aneinanderreihung von Ausdrücken ($m \in \mathbb{N}$):

$$\underbrace{\psi_1\ \psi_2\ \ldots\psi_m}_{\textit{Antecedens}} \qquad \underbrace{\psi}_{\textit{Succedens}} \qquad (\text{ abgekürzt: } \Gamma \quad \psi)$$

Ableitungsregel

Eine *Ableitungsregel* ist eine (vertikal geschriebene) Aneinanderreihung von Sequenzen ($k \in \mathbb{N}$):

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \quad \varphi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_k \quad \varphi_k\end{array}}{\Gamma \quad \varphi}$$

Ableitung im Sequenzkalkül

Eine Folge von Sequenzen $\Gamma_1 \quad \varphi_1$

(vertikal geschrieben)

$$\vdots$$

$$\Gamma_n \quad \varphi_n$$

heißt *Ableitung* des Ausdrucks φ aus einer Menge Φ von Ausdrücken, falls jede Zeile $\Gamma_i \quad \varphi_i$ $(1 \leq i \leq n)$ aus gewissen der vorangehenden durch Anwendung der Regeln des Sequenzkalküls entsteht und die Bedingungen „Γ_n" $\subseteq \Phi$ und $\varphi = \varphi_n$ gelten.

Hierbei sei „$\psi_1 \ldots \psi_m$" $:= \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$.

Definition 5.13 Ein Ausdruck φ ist aus einer Menge von Ausdrücken Φ *formal beweisbar* (oder *ableitbar*) (kurz: $\Phi \vdash \varphi$) falls es eine Ableitung von φ aus Φ gibt.

Lemma 5.7 *Für alle Φ und alle φ gilt genau dann $\Phi \vdash \varphi$, wenn es eine endliche Teilmenge Φ_0 von Φ mit $\Phi_0 \vdash \varphi$ gibt.*

Definition 5.14 [Korrektheit]

Eine Sequenz $\Gamma \quad \varphi$ heißt *korrekt*, falls „Γ" $\models \varphi$ gilt.

Eine Ableitungsregel

$$\begin{array}{c} \Gamma_1 \quad \varphi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_n \quad \varphi_n \\ \hline \Gamma \quad \varphi \end{array}$$

heißt *korrekt*, falls aus der Korrektheit von $\Gamma_i \quad \varphi_i$ $(1 \leq i \leq n)$ die Korrektheit von $\Gamma \quad \varphi$ folgt.

Satz 5.8 [Korrektheit des Sequenzkalküls]

Für alle Φ *und alle* φ *folgt* $\Phi \models \varphi$ *aus* $\Phi \vdash \varphi$.

Widerspruchsfreiheit

Definition 5.15 Eine Menge von Ausdrücken Φ heißt widerspruchsfrei, falls es keinen Ausdruck φ mit $\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$ gibt.

Lemma 5.9 *Für eine Menge von Ausdrücken Φ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- Φ *ist nicht widerspruchsfrei.*
- *Für alle Ausdrücke φ gilt $\Phi \vdash \varphi$.*

Folgerung 5.10 *Eine Menge von Ausdrücken Φ ist genau dann widerspruchsfrei, wenn es einen Ausdruck φ gibt, der nicht aus Φ ableitbar ist.*

Lemma 5.11 *Eine Menge von Ausdrücken ist genau dann widerspruchsfrei, wenn jede ihrer endlichen Teilmengen widerspruchsfrei ist.*

Lemma 5.12 *Jede erfüllbare Menge von Ausdrücken ist widerspruchsfrei.*

Lemma 5.13 *Es sei Φ widerspruchsfrei. Dann gelten*

1. $\Phi \vdash \varphi$ *gdw.* $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ *ist nicht widerspruchsfrei.*
2. $\Phi \vdash \neg\varphi$ *gdw.* $\Phi \cup \{\varphi\}$ *ist nicht widerspruchsfrei.*
3. *Eine der beiden Mengen* $\Phi \cup \{\varphi\}$ *und* $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ *ist widerspruchsfrei.*

Der GÖDELsche Vollständigkeitssatz

Satz 5.14 *Es seien Σ eine Signatur, Φ eine Menge von Ausdrücken über Σ und φ ein Σ-Ausdruck.*
Dann folgt aus $\Phi \models \varphi$ auch $\Phi \vdash \varphi$.

Satz über die Adäquatheit des Sequenzkalküls

Satz 5.15 *Es sei Σ eine Signatur, und es sei Φ eine widerspruchsfreie Menge von Ausdrücken über Σ. Dann gilt $\Phi \models \varphi$ für Σ-Ausdrücke φ genau dann, wenn $\Phi \vdash \varphi$.*