4 Aussagenlogik

4.1 Syntax der Aussagenlogik

Symbole	Bezeichnungen
Aussagenvariablen	$A_0, A_1, \ldots$
Junktoren	$\vee$, $\wedge$, $\neg$
Klammern	$($, $)$

Definition 4.1 [Induktive Definition der Ausdrücke]

1. atomare Ausdrücke: Für $i \in \mathbb{N}$ ist A_i ein Ausdruck.

2. zusammengesetzte Ausdrücke: Sind F_1 und F_2 Ausdrücke, so sind auch $\neg F_1$, $(F_1 \vee F_2)$ und $(F_1 \wedge F_2)$ Ausdrücke.

3. Abschlußbedingung: Eine Zeichenreihe ist nur dann ein Ausdruck, wenn dies auf Grund von **1**. oder **2**. der Fall ist.

4.2 Semantik der Aussagenlogik

Definition 4.2 Eine Abbildung $\beta : \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \to \{0, 1\}$ heißt *Belegung* der (Aussagen-)Variablen.

Definition 4.3 Ist β eine Belegung, so definieren wir induktiv die *Interpretation* $\mathfrak{I}_\beta$ eines Ausdrucks F:

1. für atomare Ausdrücke: Für $i \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{I}_\beta(A_i) := \beta(A_i)$.

2. für zusammengesetzte Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_\beta(\neg F_1) &:= 1 - \mathfrak{I}_\beta(F_1)\,, \\ \mathfrak{I}_\beta((F_1 \vee F_2)) &:= \max\{\mathfrak{I}_\beta(F_1), \mathfrak{I}_\beta(F_1)\} \quad \text{und} \\ \mathfrak{I}_\beta((F_1 \wedge F_2)) &:= \min\{\mathfrak{I}_\beta(F_1), \mathfrak{I}_\beta(F_1)\} \end{aligned}$$

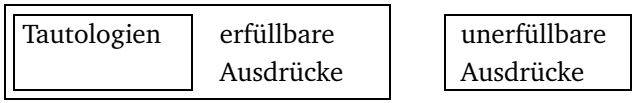
Vereinbarungen:

$$\begin{aligned} (F \to G) &:= (\neg F \vee G) \\ (F \leftrightarrow G) &:= ((F \to G) \wedge (G \to F)) \end{aligned}$$

Definition 4.4 Ein Ausdruck F heißt

1. *erfüllbar*, falls es eine Belegung β mit $\mathfrak{I}_\beta(F) = 1$ gibt,
2. *Tautologie*, falls $\mathfrak{I}_\beta(F) = 1$ für alle Belegungen β gilt.

Satz 4.1 *Ein Ausdruck F ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.*



Definition 4.5 Eine Ausdruck G heißt *Folgerung* der Formelmenge $\mathcal{F}$, falls für jedes Belegung β, die $\mathfrak{I}_\beta(F) = 1$ für alle $F \in \mathcal{F}$ erfüllt, auch $\mathfrak{I}_\beta(G) = 1$ gilt.

Schreibweise: $\mathcal{F} \models G$

Folgerung 4.2 *Es seien $F_1, \ldots, F_k, G$ Ausdrücke. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$,
2. $\big((\bigwedge_{i=1}^{k} F_i) \to G\big)$ *ist eine Tautologie, und*
3. $\big((\bigwedge_{i=1}^{k} F_i) \wedge \neg G\big)$ *ist unerfüllbar.*

4.3 Semantische Äquivalenz

Definition 4.6 Zwei Ausdrücke F, G heißen *semantisch äquivalent*, falls $\mathfrak{I}_\beta(\mathsf{F}) = \mathfrak{I}_\beta(\mathsf{G})$ für alle Belegungen β gilt.

Folgerung 4.3 *Es seien* F, G *zwei Ausdrücke. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. F *und* G *sind semantisch äquivalent.*
2. $\mathsf{F} \models \mathsf{G}$ *und* $\mathsf{G} \models \mathsf{F}$.
3. $\big(\mathsf{F} \leftrightarrow \mathsf{G}\big)$ *ist eine Tautologie.*

Satz 4.4 (Ersetzbarkeitstheorem) *Es seien* F *und* G *semantisch äquivalent. Ist* F *ein Teilausdruck von* H *und entsteht* H' *aus* H *durch Ersetzen eines Vorkommens von* F *durch* G*, so ist* H' *semantisch äquivalent zu* H.