4 Aussagenlogik

4.1 Syntax der Aussagenlogik

Symbole	Bezeichnungen
Aussagenvariablen	$A_0, A_1, \dots$
Junktoren	$\vee,\ \wedge,\ \neg$
Klammern	$(,\ )$

Definition 4.1 [Induktive Definition der Ausdrücke]

1. atomare Ausdrücke: Für $i \in \mathbb{N}$ ist A_i ein Ausdruck.

2. zusammengesetzte Ausdrücke: Sind F_1 und F_2 Ausdrücke, so sind auch $\neg F_1$, $(F_1 \vee F_2)$ und $(F_1 \wedge F_2)$ Ausdrücke.

3. Abschlußbedingung: Eine Zeichenreihe ist nur dann ein Ausdruck, wenn dies auf Grund von **1**. oder **2**. der Fall ist.

4.2 Semantik der Aussagenlogik

Definition 4.2 Eine Abbildung $\beta : \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \to \{0, 1\}$ heißt *Belegung* der (Aussagen-)Variablen.

Definition 4.3 Ist β eine Belegung, so definieren wir induktiv die *Interpretation* $\mathfrak{I}_\beta$ eines Ausdrucks F:

1. für atomare Ausdrücke: Für $i \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{I}_\beta(A_i) := \beta(A_i)$.

2. für zusammengesetzte Ausdrücke:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{I}_\beta(\neg F_1) & := & 1 - \mathfrak{I}_\beta(F_1)\ , \\ \mathfrak{I}_\beta((F_1 \vee F_2)) & := & \max\{\mathfrak{I}_\beta(F_1), \mathfrak{I}_\beta(F_2)\} \quad \text{und} \\ \mathfrak{I}_\beta((F_1 \wedge F_2)) & := & \min\{\mathfrak{I}_\beta(F_1), \mathfrak{I}_\beta(F_2)\} \end{array}$$

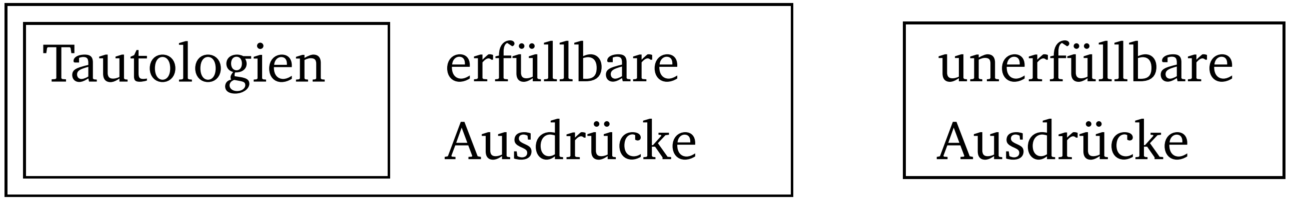
Vereinbarungen:

$$\begin{aligned}(F \rightarrow G) &:= (\neg F \vee G)\\ (F \leftrightarrow G) &:= ((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))\end{aligned}$$

Definition 4.4 Ein Ausdruck F heißt

1. *erfüllbar*, falls es eine Belegung β mit $\mathfrak{I}_\beta(F) = 1$ gibt,
2. *Tautologie*, falls $\mathfrak{I}_\beta(F) = 1$ für alle Belegungen β gilt.

Satz 4.1 *Ein Ausdruck* F *ist genau dann eine Tautologie, wenn* $\neg F$ *unerfüllbar ist.*



Tautologien

erfüllbare Ausdrücke

unerfüllbare Ausdrücke

Definition 4.5 Eine Ausdruck G heißt *Folgerung* der Formelmenge $\mathcal{F}$, falls für jedes Belegung β, die $\mathfrak{I}_\beta(F) = 1$ für alle $F \in \mathcal{F}$ erfüllt, auch $\mathfrak{I}_\beta(G) = 1$ gilt.

Schreibweise: $\mathcal{F} \models G$

Folgerung 4.2 *Es seien* $F_1, \ldots, F_k, G$ *Ausdrücke. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$,
2. $\left((\bigwedge_{i=1}^{k} F_i) \to G\right)$ *ist eine Tautologie, und*
3. $\left((\bigwedge_{i=1}^{k} F_i) \land \neg G\right)$ *ist unerfüllbar.*

4.3 Semantische Äquivalenz

Definition 4.6 Zwei Ausdrücke F, G heißen *semantisch äquivalent*, falls $\mathfrak{I}_\beta(F) = \mathfrak{I}_\beta(G)$ für alle Belegungen β gilt.

Folgerung 4.3 *Es seien* F, G *zwei Ausdrücke. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. F *und* G *sind semantisch äquivalent.*
2. $F \models G$ *und* $G \models F$.
3. $\big(F \leftrightarrow G\big)$ *ist eine Tautologie.*

Satz 4.4 (Ersetzbarkeitstheorem) *Es seien* F *und* G *semantisch äquivalent. Ist* F *ein Teilausdruck von* H *und entsteht* H' *aus* H *durch Ersetzen eines Vorkommens von* F *durch* G*, so ist* H' *semantisch äquivalent zu* H.

Normalformen

Definition 4.7

1. Ein Ausdruck der Form A_i oder $\neg A_i$ heißt *Literal*.
2. Ein Ausdruck F ist genau dann in *konjunktiver Normalform,* wenn F die Form
$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\big(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij}\big)\Big)$$
hat, wobei die L_{ij} Literale sind.
3. Ein Ausdruck F ist genau dann in *disjunktiver Normalform*, wenn F die Form
$$\Big(\bigvee_{i=1}^{n}\big(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{ij}\big)\Big)$$
hat, wobei die L_{ij} Literale sind.

Der Endlichkeitssatz für die Erfüllbarkeit der Aussagenlogik

Satz 4.5 *Eine Menge $\mathcal{F}$ von Ausdrücken ist genau dann erfüllbar, wenn jede ihrer endlichen Teilmengen erfüllbar ist.*

4.4 Folgerungen und Ableitungen

Ableitbarkeit

Voraussetzung: Kalkül (z.B. Gentzen-Kalkül)

Ableitungsrelation: $\vdash_{\mathsf{K}}$

Satz 4.6 (Endlichkeitssatz für die Ableitung) *Für eine Menge von Ausdrücken* $\mathcal{F}$ *gilt genau dann* $\mathcal{F} \vdash_{\mathsf{K}} \mathsf{F}$*, wenn es eine endliche Teilmenge* $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ *mit* $\mathcal{F}_0 \vdash_{\mathsf{K}} \mathsf{F}$ *gibt.*

Definition 4.8 Eine Menge von Ausdrücken $\mathcal{F}$ heißt *widerspruchsfrei* bezüglich $\vdash_{\mathsf{K}}$, falls es einen Ausdruck F mit $\mathcal{F} \not\vdash_{\mathsf{K}} \mathsf{F}$ gibt.

Semantik		**Syntax**
Folgerung		Ableitung
$\mathcal{F} \models \mathsf{F}$	$\longrightarrow$	$\mathcal{F} \vdash_{\mathsf{K}} \mathsf{F}$
	Korrektheit	
$\mathcal{F} \models \mathsf{F}$	$\longleftarrow$	$\mathcal{F} \vdash_{\mathsf{K}} \mathsf{F}$
	Vollständigkeit	
Erfüllbarkeit		Widerspruchsfreiheit