2 Elementare Graphentheorie

Definition 2.1 Ein *ungerichteter Graph* (mit Mehrfachkanten) ist eine Inzidenzstruktur $(P, \mathbb{B}, I)$, welche die Bedingung $1 \leq |\{p : p \; I \; B\}| \leq 2$ für alle Blöcke $B \in \mathbb{B}$ erfüllt.

Die Punkte $p \in P$ werden dann *Ecken* oder *Knoten* genannt, die Blöcke $B \in \mathbb{B}$ *Kanten*.

Eine Kante B mit $|\{p : p \; I \; B\}| = 1$ heißt auch *Schlinge*.

Die Zahl $|\mathbb{B}(p)|$ heißt *Grad* des Knotens $p \in P$.

Eine Folgerung aus Folgerung 1.16.

Folgerung 2.1 *Ist* $(P, \mathbb{B}, I)$ *ein endlicher Graph ohne Schlingen, so ist die Anzahl der Knoten ungeraden Grades gerade.*

Definition 2.2 Eine Folge $(p_0, B_1, p_1, \ldots, p_{l-1}, B_l, p_l)$ heißt *Weg* (oder *Pfad*) im Graphen $(P, \mathbb{B}, I)$, falls $p_{i-1}, p_i \in P, B_i \in \mathbb{B}$ und $p_{i-1} \; I \; B_i, \; p_i \; I \; B_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gelten.

Man sagt auch, der Weg $(p_0, B_1, p_1, \ldots, p_{l-1}, B_l, p_l)$ verbindet die Knoten p_0 und p_l.

Ist $p_0 = p_l$ im Weg $(p_0, B_1, p_1, \ldots, p_{l-1}, B_l, p_l)$, so heißt der Weg *geschlossen*.

Die Zahl l wird als *Länge* des Weges bezeichnet.

Definition 2.3 Ein Graph $(P, \mathbb{B}, I)$ ist *zusammenhängend* falls es für alle Paare $p, p' \in P$ einen Weg gibt, der p und p' verbindet.

Definition 2.4 Ein Weg $(p_0, B_1, p_1, \ldots, p_{l-1}, B_l, p_l)$ heißt EULER*sch*, falls er durch alle Kanten genau einmal läuft, d.h. falls $\mathbb{B} = \{B_i : i = 1, \ldots, l\}$ und $l = |\mathbb{B}|$ gelten.

Ein geschlossener EULERscher Weg heißt auch EULER*tour*.

Satz 2.2 (Euler, Hierholzer) *Ein schlingenfreier zusammenhängender endlicher Graph* $(P, \mathbb{B}, I)$ *hat genau dann eine* EULER*tour, wenn der Grad jeder Ecke* $p \in P$ *gerade ist.*

Folgerung 2.3 *Ein schlingenfreier zusammenhängender endlicher Graph* $(P, \mathbb{B}, I)$ *hat genau dann einen* EULER*schen Weg, wenn er höchstens zwei Ecken ungeraden Grades hat.*

Isomorphie von Graphen

Definition 2.5 Zwei Graphen $(P, \mathbb{B}, I)$ und $(P', \mathbb{B}', I')$ heißen *isomorph*, falls es umkehrbar eindeutige Abbildungen $f : P \to P'$ und $g : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ derart gibt, daß genau dann $f(p) \; I' \; g(B)$ gilt, wenn $p \; I \; B$ erfüllt ist.

Definition 2.6 Ein Graph $(P, \mathbb{B}, I)$ heißt *schlicht*, falls er keine Mehrfachkanten hat, d.h. falls für beliebige $B, B' \in \mathbb{B}$ aus $\{p : p \; I \; B\} = \{p : p \; I \; B'\}$ die Gleichheit $B = B'$ folgt.

Lemma 2.4 *Jeder schlichte ungerichtete Graph* $(P, \mathbb{B}, I)$ *ist isomorph zu einem Graphen* $(P, \mathbb{B}', \in)$ *wobei*

$$\mathbb{B}' \subseteq \binom{P}{2} \cup \binom{P}{1} = \{\{p, p'\} : p, p' \in P\} \text{ ist.}$$

Anmerkung:

$$\binom{P}{2} = \{\{p, p'\} : p, p' \in P \text{ und } p \neq p'\}$$

$$\binom{P}{1} = \{\{p\} : p \in P\}$$

2.1 Bäume und Wälder

Definition 2.7 Ein Weg $(p_0, B_1, p_1, \ldots, p_{l-1}, B_l, p_l)$ in einem Graphen $G = (P, \mathbb{B}, I)$ heißt *Kreis* (oder *Zyklus*), falls $l \neq 0$, $p_0 = p_l$ und $p_i \neq p_j$ für $0 < i < j \leq l$ gelten.

M.a.W., ein Kreis ist ein geschlossener Weg, auf dem keine Ecke zweifach vorkommt. l heißt *Länge* des Kreises.

Definition 2.8 Ein Graph $G = (P, \mathbb{B}, I)$ heißt *Wald*, falls er keinen Kreis enthält.

Ein Graph $G = (P, \mathbb{B}, I)$ heißt *Baum*, falls er zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält.

Folgerung 2.5 *Jeder Wald ist ein schlichter Graph.*

Satz 2.6 *Es sei* $G = (P, \mathbb{B}, I)$ *ein Graph. dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

1. G *ist ein Baum.*
2. *Zu je zwei Ecken* $p, p' \in P$ *gibt es genau einen Weg von* p *nach* p'.
3. G *ist zusammenhängend, und kein Teilgraph der Form* $(P, \mathbb{B}', I')$ *mit* $\mathbb{B}' \subset \mathbb{B}$ *und* $I' \subseteq I$ *ist zusammenhängend.*
   (G ist ein minimaler zusammenhängender Graph.)
4. G *enthält keinen Kreis, aber jeder Graph der Form* $(P, \widehat{\mathbb{B}}, \widehat{I})$ *mit* $\widehat{\mathbb{B}} \supset \mathbb{B}$ *und* $\widehat{I} \supseteq I$ *enthält einen Kreis.*
   (G ist ein maximaler kreisfreier Graph.)
5. G *ist zusammenhängend, und es gilt* $|P| = |\mathbb{B}| + 1$.

Definition 2.9 Eine Ecke $p \in P$ eines Graphen $G = (P, \mathbb{B}, I)$ heißt *Blatt*, falls p keine Schlinge hat und p den Grad 1 hat.

Lemma 2.7 *Jeder endliche Baum* $(P, \mathbb{B}, I)$ *mit mindestens zwei Knoten hat mindestens zwei Blätter.*

Lemma 2.8 *Es sei* $G = (P, \mathbb{B}, I)$ *ein Graph mit mindestens einem Blatt* $\widehat{p}$ *und es seien*

$$\widehat{\mathbb{B}} := \mathbb{B} \setminus \{B : \widehat{p} \; I \; B\} \text{ und}$$

$$\widehat{I} := I \setminus (\{\widehat{p}\} \times \{B : \widehat{p} \; I \; B\}).$$

Dann ist G *genau dann ein Baum, wenn* $\widehat{G} := (P \setminus \{\widehat{p}\}, \widehat{\mathbb{B}}, \widehat{I})$ *ein Baum ist.*

2.2 Planare Graphen

Definition 2.10 Ein schlichter Graph ohne Schlingen $(V, \mathcal{K}, \in)$ (oder einfach $(V, \mathcal{K})$) heißt *planar*, wenn es eineindeutige Abbildungen $\phi : V \to \mathbb{R}^2$ und ψ von $\mathcal{K}$ in die Menge der Strecken in $\mathbb{R}^2$ derart gibt, daß

1. für $\{p, p'\} \in \mathcal{K}$ gilt $\phi(p)$ und $\phi(p')$ sind die Endpunkte von $\psi(\{p, p'\})$, und
2. keine der Strecken $\psi(k),\ k \in \mathcal{K}$ schneiden einander, außer möglicherweise in ihren Endpunkten $\phi(p),\ p \in V$.

Satz 2.9 (Euler) *Es sei* $G = (V, \mathcal{K})$ *ein zusammenhängender planarer Graph, und es sei* f *die Anzahl der Flächen (einschließlich der unendlichen Außenfläche) einer planaren Darstellung von* G. *Dann gilt*

$$|V| + f = |\mathcal{K}| + \in .$$

Satz 2.10 (Kuratowski) *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keinen Teilgraphen hat, der zu einer Unterteilung des* K_5 *oder des* $K_{3,3}$ *isomorph ist.*

Folgerung 2.11 *Ist* $G = (V, \mathcal{K})$ *ein planarer Graph mit* $|V| \geq 3$, *so gilt* $3|V| \geq |\mathcal{K}| + 6$.

Ist $G = (V, \mathcal{K})$ *ein planarer Graph mit* $|V| \geq 3$, *welcher keinen Kreis der Länge 3 enthält, so gilt* $2|V| \geq |\mathcal{K}| + 4$.

2.3 Eckenfärbungen und paare Graphen

Definition 2.11 Eine Abbildung $\phi : V \to \{1, \dots, n\}$ heißt n-Färbung eines Graphen $G = (V, \mathcal{K}, I)$, falls für alle Kanten $k \in \mathcal{K}$ stets $\phi(p) \neq \phi(p')$ für $p, p' \in \{p : p\ I\ k\}$ und $p \neq p'$ gilt.

$\chi(G) := \min\{n : G \text{ ist } n\text{-färbbar}\}$ heißt *chromatische Zahl* des Graphen G.

Definition 2.12 Eine Teilmenge $C \subseteq V$ eines schlichten Graphen $G = (V, \mathcal{K})$ heißt *Clique*, falls $\{p, p'\} \in \mathcal{K}$ für alle Paare $p, p' \in C\ p \neq p'$ gilt.

$\omega(G) := \max\{|C| : C \text{ ist Clique in } G\}$

Folgerung 2.12 *Für einen schlichten Graphen gilt* $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, *wobei* $\Delta(G)$ *der maximale Knotengrad in* G *ist.*

Definition 2.13 Ein Graph $G = (V, \mathcal{K}, I)$ heißt *paar* (oder *bipartit*), falls es eine Zerlegung $\{X, Y\}$ der Eckenmenge V derart gibt, dass für jede Kante $k \in \mathcal{K}$ sowohl $\{p : p \; I \; k\} \cap X \neq \emptyset$ als auch $\{p : p \; I \; k\} \cap Y \neq \emptyset$ gelten (m.a.W. keine Kante führt von X nach X oder von Y nach Y).

Folgerung 2.13 *Ein Graph ist genau dann paar, wenn er zweifärbbar ist.*

Satz 2.14 *Ein Graph* $G = (V, \mathcal{K}, I)$ *ist genau dann paar, wenn er keinen Kreis ungerader Länge als Teilgraphen enthält.*