3 Allgemeine Algebren

Definition 3.1 Für eine Menge A nennen wir eine n-stellige Funktion $\omega : A^n \rightarrow A$ eine n-*äre algebraische Operation*.

Bemerkung zum Fall $n = 0$: Nulläre Operationen werden als *Konstanten* bezeichnet.

Notation: $A^{(A^n)}$ ist die Menge aller n-stelligen Funktionen $\omega : A^n \rightarrow A$.

Definition 3.2 Ein Paar (A, Ω) heißt *(universelle) Algebra*, falls

1. A eine nichtleere Menge ist, und
2. $\Omega \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(A^n)}$, d.h. Ω eine Menge von Operationen auf A ist.

Bemerkung: Ω korrespondiert zur Signatur Σ.

Beispiele I

Definition 3.3 Eine Algebra der Form $(G, \cdot\, , {}^{-1}, e)$ heißt *Gruppe*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. „ $\cdot$ “ ist binäre assoziative Operation auf G.
2. Für alle $g \in G$ gilt $g \cdot e = g$. [e ist Rechtseinselement.]
3. Für alle $g \in G$ gilt $g \cdot (g^{-1}) = e$. [g^{-1} ist Rechtsinverses zu g.]

Lemma 3.1 *Ist* $(G, \cdot\, , {}^{-1}, e)$ *eine Gruppe, so ist* e *auch Linkseinselement, und zu jedem Element* $g \in G$ *ist* g^{-1} *auch Linksinverses. Überdies ist* e *das einzige (Rechts-)Einselement in* G*, und zu jedem Element* $g \in G$ *ist auch* g^{-1} *das einzige Gruppenelement, welches* $g \cdot (g^{-1}) = e$ *erfüllt.*

Beispiele II

Definition 3.4 Eine Algebra der Form $(R, +, \cdot, -, 0)$ heißt *Ring* [$(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ heißt *Ring mit Einselement*], falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $(R, +, -, 0)$ ist Abelsche (kommutative) Gruppe.
2. „ $\cdot$ “ ist binäre assoziative Operation auf R.
   [$(R, \cdot, 1)$ ist Monoid.]
3. Es gelten die Distributivgesetze, d.h. für beliebige $a, b, c \in R$ gelten $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Folgerung 3.2 *In Ringen gelten für beliebige $a, b \in R$ die folgenden Gleichungen:*

$$\begin{array}{rclclr} 0 \cdot a & = & 0 & = & a \cdot 0 & , \\ (-a) \cdot b & = & -(a \cdot b) & = & a \cdot (-b) & \textit{und} \\ (-a) \cdot (-b) & = & a \cdot b & & & \end{array}$$

Definition 3.5 Zwei Algebren (A, Ω) und (A', Ω') heißen *gleichartig*, falls es eine eineindeutige aritätserhaltende Abbildung ψ von Ω auf Ω' gibt.

(Man sagt auch, (A, Ω) und (A', Ω') haben dieselbe Signatur.)

Definition 3.6 Eine Abbildung $h : A \to A'$ heißt *Homomorphismus* einer Algebra (A, Ω) in eine (unter ψ gleichartige) Algebra (A', Ω'), falls für alle $\omega \in \Omega$ und alle $a_i \in A$ die Gleichung

$$h\big(\omega(a_1, \ldots, a_n)\big) = \psi(\omega)\big(h(a_1), \ldots, h(a_n)\big)$$

gilt.

Hierbei sei ω eine n-äre Operation in (A, Ω).

Definition 3.7 Eine binäre Relation $\sim$ heißt *Kongruenzrelation* auf einer Algebra (A, Ω), falls

1. $\sim$ Äquivalenzrelation auf der Menge A ist, und
2. für alle $\omega \in \Omega$ und alle $a_i, a_i' \in A$ die Beziehung $\omega(a_1, \ldots, a_n) \sim \omega(a_1', \ldots, a_n')$ aus $a_i \sim a_i'$ folgt.

Notation: $[a]_\sim := \{a' : a' \sim a\}$ für die von $a \in A$ erzeugte Äquivalenzklasse.

Satz 3.3 *Sind* (A, Ω) *eine Algebra und* $\sim$ *eine Kongruenzrelation auf* (A, Ω), *so bildet die Menge der Äquivalenzklassen* $A/_\sim := \left\{[a]_\sim : a \in A\right\}$ *mit den gemäß* $\omega\big([a_1]_\sim, \ldots, [a_n]_\sim\big) := [\omega(a_1, \ldots, a_n)]_\sim$ *definierten Operationen* $\omega \in \Omega$ *eine Algebra* $(A/_\sim, \Omega)$, *die homomorphes Bild von* (A, Ω) *unter dem Homomorphismus* $h_\sim(a) := [a]_\sim$ *ist.*

Satz 3.4 (Homomorphiesatz) *Es seien* (A, Ω) *und* (A', Ω') *(unter* ψ *gleichartige) Algebren, und es sei* $h : A \to A'$ *ein Homomorphismus von* (A, Ω) *in* (A', Ω').

Dann definiert die Beziehung

$$a \sim a' \text{ genau dann, wenn } h(a) = h(a')$$

eine Kongruenzrelation auf (A, Ω), *und es gibt einen Isomorphismus* ι *von* $(A/{\sim}, \Omega)$ *in* (A', Ω') *derart, daß* $h = \iota \circ h_{\sim}$