Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger

D–06120 HALLE (Saale)
von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714

3. Übung zur Vorlesung „Informationstheoretische Problem der Informatik“
Wintersemester 2012/2013 2.11.2012

Abgabe: Donnerstag, den 15.11.2012 in der Vorlesung

Aufgabe 3.1:

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen für $X = \{0, \ldots, r-1\}$ und $w, v \in X^*$.

(a) Aus $w \leq_{lex} v$ folgt $0.w \leq 0.v$ und aus $0.w < 0.v$ folgt $w <_{lex} v$.

(b) $w <_{lex} v \iff 0.w < 0.v$ für $v \notin X^* \cdot 0$, und

(c) $$\begin{aligned} w <_{lex} v &\iff (0.w < 0.v \vee v \in w \cdot 0 \cdot 0^*) \\ &\iff (0.w < 0.v \vee w \sqsubset v)\ . \end{aligned}$$

(d) Aus $w \sqsubseteq v$ folgt $0 \leq 0.v - 0.w \leq r^{-|w|} - r^{-|v|}$, und

(e) $w \sqsubseteq v \iff 0 \leq 0.v - 0.w \leq r^{-|w|} - r^{-|v|}$ für $v \notin X^* \cdot 0$.

Wir nennen einen Code $C \subseteq X^*$ *präfixmaximal*, falls C ein Präfix-Code ist und es keinen Präfix-Code $C' \supset C$ gibt.

Aufgabe 3.2:

Zeigen Sie folgende Aussage. Ein Präfix-Code $C \subseteq X^*$ ist genau dann präfixmaximal, wenn es zu jedem $w \in X^*$ ein $v_W \in C$ mit der Eigenschaft $w \sqsubseteq v_w \vee v_w \sqsubseteq w$ gibt.

Aufgabe 3.3:

Leiten Sie daraus einen Algorithmus ab, der zu gegebenem Präfix-Code $C \subseteq X^*$ einen präfixmaximalen Code C', der C enthält, konstruiert.

Aufgabe 3.4:

Es sei $V \subseteq X^*$, und es seien a_i und b_i die Anzahlen der Wörter einer Länge $\leq i$ in V bzw. $\mathbf{T}(V)$, d.h. $a_i := |\{w : w \in V \wedge |w| \leq i\}|$ sowie $b_i := |\{v : v \in \mathbf{T}(V) \wedge |v| \leq i\}|$. Gilt $\mathbf{T}(V) \subseteq \{v : \exists w_1 \exists w_2 (|w_1|, |w_2| \leq k \wedge w_1 \cdot v \cdot w_2 \in V)\}$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$, so folgt daraus $b_i \leq (2k+1)^2 \cdot a_{i+2k}$.

Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger

D–06120 HALLE (Saale)
von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714

4. Übung zur Vorlesung „Informationstheoretische Problem der Informatik“
Wintersemester 2012/2013 9.11.2012

Abgabe: Donnerstag, den 22.11.2012 in der Vorlesung

Aufgabe 4.1:
Konstruieren Sie für die Codierung $\varphi : \{0,1\}^* \to \{a,b\}^*$ mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} aabaa, & \text{falls } x = 0, \text{ und} \\ aab, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

einen decodierenden endlichen Automaten $\mathcal{A} = (\{a,b\}, \{0,1,\#\}, Z, z_0, f, g)$, welcher auf Grundlage einer empfangenen Nachricht $v \in \{a,b\}^*$ ein möglichst langes Präfix der gesendeten Nachricht $w \in \{0,1\}^*$, $\varphi(w) \sqsubseteq v$, ausgibt. Für den Fall, dass v kein Präfix eines $\varphi(w)$ ist, soll $\mathcal{A}$ die Ausgabe mit der Fehlermeldung # abschließen.

Aufgabe 4.2:
Analysieren Sie die Decodierverzögerung Ihres Automaten aus der voranstehen Aufgabe.

Aufgabe 4.3:
Führen Sie analoge Untersuchungen für die Codierung $\varphi : \{0,1,2,3\}^* \to \{a,b\}^*$ mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} a, & \text{falls } x = 0, \\ ab, & \text{falls } x = 1, \\ bba, & \text{falls } x = 2, \text{ und} \\ b^5, & \text{falls } x = 3 \end{cases}$$

durch.