Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger

D–06120 HALLE (Saale)
von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714

1. Übung zur Vorlesung „Informationstheoretische Problem der Informatik"
Wintersemester 2012/2013 12.10.2012

Abgabe: Donnerstag, den 18.10.2012 in der Vorlesung

Im Buch von Donald E. KNUTH „The Art of Computer Programming I" werden eine Reihe von Gleichungen für Binomialkoeffizienten hergeleitet. Schwierig ist es, die Summe $\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}$ zu berechnen.
Dazu betrachten wir die r-näre SHANNON-*Entropie* $h_r(\lambda) := -\lambda \cdot \log_r \frac{\lambda}{r-1} - (1-\lambda) \cdot \log_r(1-\lambda)$ für $\lambda \in [0,1]$ und $r \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Aufgabe 1.1:

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{i=\lambda\cdot n}^{n} (r-1)^i \binom{n}{i} \leq \frac{(r-1+r^t)^n}{r^{t\cdot\lambda\cdot n}}$ für beliebiges $t \leq 0$ gilt.
Minimieren Sie bezüglich t auf der rechten Seite, und zeigen Sie die Ungleichung

$$\sum_{i=\lambda\cdot n}^{n} (r-1)^i \binom{n}{i} \leq r^{n\cdot h_r(\lambda)} \text{ für } \lambda \geq \frac{r-1}{r} .$$

Aufgabe 1.2:

Berechnen Sie $\sum\limits_{i=k}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i}$ für $k \in \{0,\ldots,n\}$.

Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ heiße $\cap$-*konvex*, falls für alle $x, y \in [0,1]$, $x < y$ und alle $t \in [0,1]$ die Beziehung $f((1-t)\cdot x + t\cdot y) \geq (1-t)\cdot f(x) + t\cdot f(y)$ gilt.

Aufgabe 1.3:

Beweisen Sie die JENSENsche Ungleichung für $\cap$-konvexe Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \cdot f(x_i) \text{ , falls } \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1 \text{ und alle } \gamma_i \geq 0 \text{ sind,}$$

und leiten Sie daraus ab, dass die SHANNON-Entropien $h(p_1,\ldots,p_r) := -\sum_{i=1}^{r} p_i \cdot \log_r p_i$, wobei $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$, ihren maximalen Wert für $p_1 = \ldots = p_r = \frac{1}{r}$ annehmen.

Aufgabe 1.4:

Zeigen Sie

$$\forall x (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to x + 1 < e^x) \,.$$

Benutzen Sie diese Ungleichung, um für beliebige positive p_i, q_i mit und $\sum_{i=1}^{n} q_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i$ die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log_e \frac{p_i}{q_i} \geq 0 \tag{1}$$

zu zeigen. Wann tritt in der Ungleichung (1) die Gleichheit ein?

Aufgabe 1.5:

Konstruieren sie ternäre Präfixcodes mit Codewörtern der folgenden Längen bzw. begründen Sie, warum es keinen ternären Code mit den vorgegebenen Wortlängen geben kann:

(a) $(1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5)$

(b) $(1, 1, 2, 2, 2, 4, 5, 5)$

(c) $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots)$

Aufgabe 1.6:

Es sei $T = (V, E, v_0)$ ein Baum mit der Knotenmenge V, der Kantenmenge E und der Wurzel v_0. Weiter bezeichne $\ell(v)$ den Abstand von $v \in V$ zur Wurzel v_0. Wir setzen $\mathcal{L}(T) := \sum_{b \in B} \ell(b)$, wobei B die Menge der Blätter von T sei.
Mit $\mathcal{T}(n, r)$ bezeichnen wir die Menge aller Bäume mit n Blättern und vom Verzweigungsgrad $\leq r$.
Bestimmen Sie $h_{\min}(n, r) := \min_{T \in \mathcal{T}(n,r)} \mathcal{L}(T)$ und, für den Fall, dass kein innerer Knoten den Ausgangsgrad 1 hat, auch $h_{\max}(n, r) := \max_{T \in \mathcal{T}(n,r)} \mathcal{L}(T)$.