3 Der Vollständigkeitssatz

Lemma 3.1 *Für eine Menge von Ausdrücken Ψ sind die folgenden Implikationen äquivalent:*

1. *Für alle Ausdrücke ψ folgt aus $\Psi \models \psi$ auch $\Psi \vdash \psi$.*
2. *Wenn Ψ widerspruchsfrei ist, so ist Ψ erfüllbar.*

Für Terme sei $t \sim t' :\Leftrightarrow \Phi \vdash \equiv t\,t'$

Lemma 3.2 *1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.*

2. $\sim$ ist verträglich mit den Funktions- und Relationssymbolen, d.h. aus $t_i \sim t_i'$, $i = 1, \ldots, n$ folgen

(a) $ft_1 \ldots t_n \sim ft_1' \ldots t_n'$ und

(b) $\Phi \vdash Rt_1 \ldots t_n$ gdw. $\Phi \vdash Rt_1' \ldots t_n'$.

Für Terme t sei $\overline{t} := \{t' : t \sim t'\}$ die von t erzeugt Äquivalenzklasse.

Definition 3.1 Es sei $M := \{\overline{t} : t$ ist Term$\}$. Wir setzen

$\mathfrak{I}_{\Phi}(c) := \overline{c}$

$\mathfrak{I}_{\Phi}(f)$: $\quad \mathfrak{I}_{\Phi}(f)(\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}) := \overline{f t_1, \ldots, t_n}$

$\mathfrak{I}_{\Phi}(R)$: $\quad (\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}) \in \mathfrak{I}_{\Phi}(R) :\Longleftrightarrow \Phi \vdash R t_1, \ldots, t_n$

$\beta_{\varphi}(v) := \overline{v}$

Dann heißt $\mathfrak{I}_{\varphi\,\beta_{\varphi}}$ *Terminterpretation*. ❏

Lemma 3.3 (Terminterpretation) *1. Für alle Terme t gilt $\mathfrak{I}_{\Phi}(t) = \overline{t}$.*

2. Für alle atomaren Ausdrücke φ gilt genau dann $\mathfrak{I}_{\Phi}(\varphi) = 1$ wenn $\Phi \vdash \varphi$.

3. Für alle Ausdrücke $\varphi = \varphi(v_0, \ldots, v_l)$ gilt genau dann

(a) $\mathfrak{I}_{\Phi}(\exists v_0 \ldots \exists v_l \varphi) = 1$ wenn es Terme $t_0, \ldots, t_l$ mit $\mathfrak{I}_{\Phi}(\varphi \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell}) = 1$ gibt.

(b) $\mathfrak{I}_{\Phi}(\forall v_0 \ldots \forall v_l \varphi) = 1$ wenn für alle Terme $t_0, \ldots, t_l$ die Beziehung $\mathfrak{I}_{\Phi}(\varphi \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell}) = 1$ gilt.

Definition 3.2 Es sei Φ eine Menge von Ausdrücken.

1. Φ heißt *negationstreu* $:\Longleftrightarrow$
   Für alle Ausdrücke φ gilt $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$.

2. Φ *enthält Beispiele* $:\Longleftrightarrow$
   Für jeden Ausdruck φ gibt es einen Term t_φ derart, daß
   $\Phi \vdash (\exists v\varphi \to \varphi\frac{t_\varphi}{v})$.

❑

Lemma 3.4 *Es sei Φ widerspruchsfrei und negationstreu.*

1. *Dann gilt entweder $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$.*

2. *Es gilt genau dann $\Phi \vdash \varphi \vee \psi$, wenn $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \psi$ gelten.*

3. *Aus $\Phi \vdash (\varphi \to \psi)$ und $\Phi \vdash \varphi$ folgt $\Phi \vdash \psi$.*

4. *Enthält Φ zusätzlich Beispiele, so gilt genau dann $\Phi \vdash \exists v\varphi$, wenn es einen Term t mit $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{v}$ gibt.*

Satz 3.5 (Satz von Henkin)
Es sei Φ widerspruchsfrei, negationstreu und enthalte Beispiele. Für alle Ausdrücke φ gilt genau dann $\mathfrak{I}_\Phi(\varphi) = 1$, wenn $\Phi \vdash \varphi$.

Es sei Σ abzählbar. Dann gelten:

Lemma 3.6 *Ist Φ widerspruchsfrei und $\mathrm{frei}(\Phi)$ endlich, so gibt es eine widerspruchsfreie Ausdrucksmenge $\Psi \supseteq \Phi$, die Beispiele enthält.*

Lemma 3.7 *Ist Ψ widerspruchsfrei, so gibt es eine widerspruchsfreie Ausdrucksmenge $\Theta \supseteq \Psi$, die negationstreu ist.*

Folgerung 3.8 *Wenn Φ widerspruchsfrei und $\mathrm{frei}(\Phi)$ endlich sind, so ist Φ erfüllbar.*

Satz 3.9 *Ist Σ eine höchstens abzählbare Symbolmenge und Φ eine widerspruchsfreie Ausdrucksmenge über Σ, so ist Φ erfüllbar.*

Hilfssatz 3.10 *Ist Φ' aus Φ durch Einsetzung neuer Konstanten (anstelle freier Variablen) entstanden, so ist Φ' widerspruchsfrei, falls Φ widerspruchsfrei ist.*

Satz 3.11 (Der Vollständigkeitssatz im Falle abzählbarer Symbolmengen)
Es seien Σ eine höchstens abzählbare Symbolmenge, Φ eine Menge von Ausdrücken über Σ und φ ein Σ-Ausdruck.
Dann folgt aus $\Phi \models \varphi$ auch $\Phi \vdash \varphi$.

Satz 3.12 (Satz über die Adäquatheit des Sequenzkalküls) *Es sei Σ eine höchstens abzählbare Symbolmenge, und es sei Φ eine widerspruchsfreie Menge von Ausdrücken über Σ. Dann gilt $\Phi \models \varphi$ für Σ-Ausdrücke φ genau dann, wenn $\Phi \vdash \varphi$.*

Satz 3.13 (Satz von Löwenheim und Skolem) *Jede höchstens abzählbare erfüllbare Menge von Ausdrücken ist erfüllbar über einer abzählbaren Menge.*

Satz 3.14 (Endlichkeitssatz)

(für die Folgerungsbeziehung) *Es gilt genau dann $\Phi \models \varphi$, wenn es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \varphi$ gibt.*

(für die Erfüllbarkeit) *Eine Menge von Ausdrücken Φ ist genau dann erfüllbar, wenn dies für jede ihrer endlichen Teilmengen gilt.*

Satz 3.15 *Es sei Φ eine Menge von Ausdrücken, die über beliebig großen endlichen Mengen erfüllbar ist. Dann ist Φ auch über unendlichen Mengen erfüllbar.*

4 Axiomatisierbarkeit von Theorien

Definition 4.1 Eine Theorie $\mathfrak{T}$ über Σ ist eine Menge von Σ-Sätzen, für die gilt: Für jeden Σ-Satz φ folgt $\varphi \in \mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{T} \models \varphi$. ❏

Schreibweisen:

- Es sei Φ eine Menge von Σ-Ausdrücken. $\mathfrak{T}_\Phi := \{\varphi : \varphi$ ist Σ-Satz und $\Phi \models \varphi\}$.
- Es seien $\mathfrak{A}$ eine Σ-Struktur mit der Trägermenge M und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation der Σ-Ausdrücke.

  $\mathfrak{T}_\mathfrak{I} := \{\varphi : \varphi$ ist Σ-Satz und $\mathfrak{I}(\varphi) = 1\}$.

Im folgenden werden nur noch Symbolmengen der folgenden Art:

$$\Sigma_\infty = \left(\{c_0, \ldots, c_j, \ldots\}, \{f_0^{(1)}, \ldots, f_j^{(n)}, \ldots\}, \{R_0^{(1)}, \ldots, R_j^{(n)}, \ldots\}\right)$$

bzw. entscheidbare Teilmengen von Σ_∞ betrachtet.

Definition 4.2 Es sei Σ eine entscheidbare Teilmenge von Σ_∞.
Eine Σ-Theorie heißt (*endlich*) *axiomatisierbar* $:\Longleftrightarrow$
Es gibt eine entscheidbare (endliche) Menge von Σ-Ausdrücken Φ derart, daß $\mathfrak{T} = \{\varphi : \varphi$ ist Σ-Satz und $\Phi \vdash \varphi\}$. ❑

Folgerung 4.1 *Die Prädikatenlogik der ersten Stufe $\mathfrak{T}_{allg} := \{\varphi : \varphi$ ist Σ-Satz und $\emptyset \models \varphi\}$ ist endlich axiomatisierbar.*

Satz 4.2 *Ist $\mathfrak{T}$ eine axiomatisierbare Theorie, so ist $\mathfrak{T}$ (als formale Sprache) rekursiv aufzählbar.*

Satz 4.3 (Unentscheidbarkeitssatz der Prädikatenlogik erster Stufe)
Die Menge aller allgemeingültigen Σ_∞-Sätze ist nicht entscheidbar.

Folgerung 4.4 *Das Erfüllbarkeitsproblem für die Prädikatenlogik der ersten Stufe ist unentscheidbar.*

Folgerung 4.5 *Die Menge aller erfüllbaren Σ_∞-Sätze ist nicht aufzählbares Komplement einer aufzählbaren Menge.*

Beweis: durch Reduktion auf das PCP

POSTsches Korrespondenzproblem (PCP)

gegeben Menge von Paaren von nichtleeren Wörtern

$P = \{(w_1, u_1), \ldots, (w_n, u_n)\}$ mit $w_i, u_i \in \{0,1\}^* \setminus \{e\}$

gesucht gibt es eine Folge von Indices $i_1, \ldots, i_l$ $(l \geq 1,\ 1 \leq i_j \leq n)$ mit

$w_{i_l} \cdots w_{i_1} = u_{i_l} \cdots u_{i_1}$

Zugeordneter $\{e; f_0^{(1)}, f_1^{(1)}; R^{(2)}\}$-Satz $\varphi^P = (\varphi_1^P \wedge \varphi_2^P) \rightarrow \varphi_3$ mit:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^P &= \bigwedge_{i=1}^{n} R(f_{w_i}(e), f_{u_i}(e)) \\
\varphi_2^P &= \forall w \forall u (R(w,u) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} R(f_{w_i}(w), f_{u_i}(u)) \\
\varphi_3 &= \exists t (R(t,t))
\end{aligned}$$

Hierbei sei $f_{x_1 \cdots x_n} := f_{x_1} \circ \cdots \circ f_{x_n}$ eine abkürzende Schreibweise.

Definition 4.3 1. Eine Theorie $\mathfrak{T}$ heißt *trivial*, falls $\varphi \in \mathfrak{T}$ für alle Σ-Sätze φ gilt.

2. Eine Theorie $\mathfrak{T}$ heißt *vollständig*, falls für alle Σ-Sätze φ genau dann $\varphi \in \mathfrak{T}$ gilt, wenn $\neg\varphi \notin \mathfrak{T}$ erfüllt ist.. ❑

Folgerung 4.6 (Post) *Ist eine vollständige Theorie $\mathfrak{T}$ axiomatisierbar, so ist $\mathfrak{T}$ auch entscheidbar.*

Definition 4.4

1. Ein Σ-Satz φ heißt *im endlichen erfüllbar*, falls es eine endliche Σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und eine zugehörige Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}(\varphi) = 1$ gibt.

2. Ein Σ-Satz φ heißt *im endlichen allgemeingültig*, wenn für jede endliche Σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und jede zugehörige Interpretation $\mathfrak{I}$ die Beziehung $\mathfrak{I}(\varphi) = 1$ gilt. ❏

Satz 4.7 *Die Menge aller im endlichen erfüllbaren Σ_∞-Sätze $\mathfrak{S}_{fin}$ ist aufzählbar.*

Satz 4.8 *$\mathfrak{S}_{fin}$ ist nicht entscheidbar.*

Satz 4.9 (Satz von Trachtenbrot) *Die Menge der im endlichen allgemeingültigen Σ_∞-Sätze ist nicht aufzählbar.*

Folgerung 4.10 *Die Menge der im endlichen allgemeingültigen Sätze ist nicht axiomatisierbar.*

Zum Beweis von Satz 4.8

(0) $\sqsubset$ ist irreflexive Halbordnung mit Minimum e

$w \sqsubseteq v$ sei Abkürzung für $w \sqsubset v \vee w \equiv v$

(1) $\forall w\,(w \sqsubseteq f_0(w) \wedge w \sqsubseteq f_1(w))$

(2) $\forall w\,(w \equiv f_0(w) \leftrightarrow w \equiv f_1(w))$

(3) $\forall w\,(\exists v\; w \sqsubset v \rightarrow (w \sqsubset f_0(w) \wedge \forall \tilde{u}\,(w \sqsubset \tilde{u} \rightarrow$
$(f_0(w) \sqsubseteq \tilde{u} \vee f_1(w) \sqsubseteq \tilde{u}))$

m.a.W. Ist w nicht maximales Element, so sind $f_0(w), f_1(w)$
unmittelbare Nachfolger von w

(4) $\forall w\,(\exists v\; f_0(w) \sqsubset v \rightarrow \neg f_0(w) \sqsubseteq f_1(w) \wedge \neg f_1(w) \sqsubseteq f_0(w))$

Ist $f_0(w)$ nicht maximal, so sind $f_0(w)$ und $f_1(w)$ unvergleichbar.

(5) $\forall w \forall v\,(\neg w \equiv v \wedge \bigvee_{a,b \in \{0,1\}} (f_a(w) \equiv f_b(v)) \rightarrow f_0(f_a(w)) = f_a(w))$

$$PCP = ((w_1, \hat{u}_1), \dots, (w_n, \hat{u}_n))$$

(R1) $$\bigwedge_{i=1}^{n} R(f_{w_i}(e), f_{\hat{u}_i}(e))$$

(R1') $$\bigwedge_{(w,\hat{u}) \in \overline{SaF}} \neg (R(f_w(e), f_{\hat{u}}(e))) \wedge \forall w' \forall \hat{u}' (\bigwedge_{(w,\hat{u}) \in \overline{Cancel}} \neg R(f_w(w'), f_{\hat{u}}(\hat{u}'))$$
$$\wedge \; \forall w \forall \hat{u} (w \equiv f_0(w) \vee \hat{u} \equiv f_0(\hat{u}) \rightarrow \neg R(w, \hat{u}))$$

(R2) $$\bigwedge_{i=1}^{n} \forall w \forall \hat{u} \; (R(w,\hat{u}) \wedge \neg f_0 f_{w_i}(w) \equiv f_{w_i}(w) \wedge \neg f_0 f_{\hat{u}_i}(\hat{u}) \equiv f_{\hat{u}_i}(\hat{u})$$
$$\rightarrow R(f_{w_i}(w), f_{\hat{u}_i}(\hat{u})))$$

(R2') $$\bigvee_{i=1}^{n} \forall w \forall \hat{u} \; (\neg f_0 f_{w_i}(w) \equiv f_{w_i}(w) \wedge \neg f_0 f_{\hat{u}_i}(\hat{u}) \equiv f_{\hat{u}_i}(\hat{u})$$
$$\wedge \; R(f_{w_i}(w), f_{\hat{u}_i}(\hat{u})) \rightarrow R(w, \hat{u}))$$

(R3) $$\exists t \, (R(t,t))$$

$$PCP^{*} := \{(w_{i_1} \dots w_{i_\ell}, \hat{u}_{i_1} \dots \hat{u}_{i_\ell}) : i_j \in \{1, \dots, n\} \wedge \ell \geq 1\}$$