2.3 Ein Sequenzkalkül für die Prädikatenlogik erster Stufe

Definition 2.18 1. Ein endliche Folge von Ausdrücken $\Gamma = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ heißt *Sequenz*, die Menge $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ werde mit „Γ“ bezeichnet.

2. Ein Sequenzkalkül ist gegeben durch eine (endliche) Menge von Regeln, die angeben, wie aus endlichen Mengen von Sequenzen neue Sequenzen konstruiert werden.

3. Ein Sequenzkalkül heißt *korrekt* für die Prädikatenlogik der ersten Stufe, falls für jede seiner Regeln

$$\frac{\begin{array}{cc} \Gamma_1 & \varphi_1 \\ & \vdots \\ \Gamma_m & \varphi_m \end{array}}{\Gamma \quad \varphi}$$

aus „Γ_i“ $\models \varphi_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ auch „Γ“ $\models \varphi$ folgt. ❑

$$\text{(Vor)}\quad \frac{}{\Gamma \quad \varphi}\,,\ \text{falls } \varphi \in \Gamma \qquad\qquad \text{(Ant)}\quad \frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma' \quad \varphi}\,,\ \text{falls } \Gamma \subset \Gamma'$$

$$\text{(FU)}\quad \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \psi & \varphi\\ \Gamma & \neg\psi & \varphi\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & & \varphi\end{array}} \qquad\qquad \text{(Wid)}\quad \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \neg\varphi & \psi\\ \Gamma & \neg\varphi & \neg\psi\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & & \varphi\end{array}}$$

$$\text{(}\vee\text{A)}\quad \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \varphi & \chi\\ \Gamma & \psi & \chi\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & (\varphi \vee \psi) & \chi\end{array}} \qquad\qquad \text{(}\vee\text{S)}\quad \frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\varphi \vee \psi)}\,,\ \frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\psi \vee \varphi)}$$

$$\text{(}\exists\text{A)}\quad \frac{\Gamma \quad \varphi\frac{y}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \exists x\varphi \quad \psi}\,,\quad \text{falls } y \text{ nicht frei in } \Gamma\ \exists x\varphi\ \psi$$

$$\text{(}\exists\text{S)}\quad \frac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad \exists x\varphi}$$

$$(\equiv)\quad \frac{}{t \equiv t} \qquad\qquad \text{(Sub)}\quad \frac{\begin{array}{lll}\Gamma & & \varphi\frac{t}{x}\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & t \equiv t' & \varphi\frac{t'}{x}\end{array}}$$

Abbildung 1: Die Regeln des Sequenzkalküls

2.3.1 Ableitbarkeit

Definition 2.19 Es seien Γ_i $(1 \leq i \leq n)$ endliche Sequenzen von Ausdrücken.

Eine Folge

$$\begin{array}{cc} \Gamma_1 & \varphi_1 \\ & \vdots \\ \Gamma_n & \varphi_n \end{array}$$

heißt *Ableitung im Sequenzkalkül* des Ausdrucks φ aus einer Menge Φ von Ausdrücken, falls jede Zeile $\Gamma_i \quad \varphi_i$ $(1 \leq i \leq n)$ aus den vorangehenden durch Anwendung der Regeln des Sequenzkalküls entsteht und $\varphi = \varphi_n$ sowie „Γ_n" $\subseteq \Phi$ gelten.

Schreibweise: $\Phi \vdash \varphi$ ❑

Satz 2.19 (Endlichkeitssatz für die Ableitung) *Für eine Menge von Ausdrücken Ψ gilt genau dann $\Psi \vdash \psi$, wenn es eine endliche Teilmenge $\Psi_0 \subseteq \Psi$ mit $\Psi_0 \vdash \psi$ gibt.*

Definition 2.20 Eine Menge von Ausdrücken Ψ heißt *widerspruchsfrei* bezüglich $\vdash$, falls es einen Ausdruck ψ mit $\Psi \nvdash \psi$ gibt. ❑

Folgerung 2.20 *Eine Menge von Ausdrücken ist genau dann widerspruchsfrei, wenn jede ihrer endlichen Teilmengen widerspruchsfrei ist.*

Beispiel 2.1 (Deduktionstheorem) *Es seien Φ eine Menge von Ausdrücken und φ ein Ausdruck. Dann folgt aus $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ auch $\Phi \vdash \varphi \to \psi$, d.h. $\Phi \vdash \neg\varphi \vee \psi$.*

2.3.2 Folgerungen und Ableitungen

Semantik		**Syntax**
Folgerung		Ableitung
$\Psi \models \psi$	$\longleftarrow$	$\Psi \vdash \psi$
	Korrektheit	
$\Psi \models \psi$	$\longrightarrow$	$\Psi \vdash \psi$
	Vollständigkeit	
Erfüllbarkeit		Widerspruchsfreiheit

Lemma 2.21 (Korrektheit des Sequenzkalküls)

1. *Ist* $\Psi \vdash \psi$, *so gilt auch* $\Psi \models \psi$.

2. *Gilt* $\emptyset \vdash \psi$, *so ist* ψ *allgemeingültig.*

Folgerung 2.22 *Jede erfüllbare Menge von Ausdrücken ist widerspruchsfrei.*

Lemma 2.23 *Es sei* Φ *widerspruchsfrei. Dann gelten*

1. $\Phi \vdash \varphi$ *gdw.* $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ *ist nicht widerspruchsfrei.*

2. $\Phi \vdash \neg\varphi$ *gdw.* $\Phi \cup \{\varphi\}$ *ist nicht widerspruchsfrei.*

3. *Eine der beiden Mengen* $\Phi \cup \{\varphi\}$ *und* $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ *ist widerspruchsfrei.*

Lemma 2.24 *Es sei* $\left(\Phi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Familie von Mengen von Ausdrücken Über den Symbolmengen* Σ_n, *und es gelten* $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ *und* $\Phi_i \subseteq \Phi_{i+1}$.

Sind alle Mengen Φ_n *bezüglich* Σ_n *widerspruchsfrei, so ist auch* $\Phi := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i$ *bezüglich* $\Sigma := \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$ *widerspruchsfrei.*