

2 Prädikatenlogik

2.1 Syntax der Prädikatenlogik der ersten Stufe

2.1.1 Symbole

(Individuen-)Variablensymbole:	$v_0, v_1, \dots$
(Individuen-)Konstantensymbole:	$c_0, c_1, \dots$
Funktionssymbole:	$f_0^{(n)}, f_1^{(n)}, \dots \quad (n = 1, 2, \dots)$
Relationensymbole:	$R_0^{(n)}, R_1^{(n)}, \dots \quad (n = 1, 2, \dots)$
spezielles Relationensymbol	$\equiv$
Junktoren:	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
Quantoren:	$\exists, \forall$

Folgerung 2.1 Ist $X \cup \Sigma_F$ endlich, so ist $T[X, \Sigma_F]$ eine präfixfreie deterministisch kontextfreie Sprache.

Beobachtung: Die Funktionssymbole $f_i^{(n)}$, $n \geq 1$, operieren wie folgt auf der Menge der Σ -Terme $T[X, \Sigma_F]$:

$$f_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n) := f_j^{(n)} t_1 \dots t_n$$

Folgerung 2.2 Die Menge aller Σ -Terme $T[X, \Sigma_F]$ bildet eine Algebra $(T[X, \Sigma_F], \{f_i^{(n)} \mid i, n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1\})$ mit den Operationen $f_i^{(n)}$.

2.1.2 Terme

funktionale Signatur: $\Sigma_F \subseteq \underbrace{\{(c_i, 0) \mid i \in \mathbb{N}\}}_{\text{Konstanten}} \cup \underbrace{\{(f_i^{(n)}, n) \mid i, n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1\}}_{\text{mehrstellige Funktionen}}$

Variablen: $X \subseteq \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Definition 2.1 [Definition der prädikatenlogischen Terme]

1. Induktionsanfang (Atome) Variablensymbole und Konstantensymbole sind Terme.

2. Induktionsschritt Sind $t_1, t_2, \dots, t_n$ Terme und ist $f_j^{(n)}$ ein Funktionensymbol, so ist $f_j^{(n)} t_1 \dots t_n$ ein (Σ -)Term.

3. Abschluß Eine Zeichenreihe ist nur dann ein Term, wenn dies auf Grund von 1. oder 2. der Fall ist. $\square$

2.1.3 Ausdrücke (Formeln)

relationale Signatur: $\Sigma_R \subseteq \{(R_i^{(n)}, n) \mid i, n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1\} \cup \{(\equiv, 2)\}$

Definition 2.2 [Definition der prädikatenlogischen Ausdrücke]

1. Induktionsanfang (Atome) Sind $t_1, t_2, \dots, t_n$ (Σ -)Terme und ist $R_j^{(n)}$ ein Relationensymbol, so sind $R_j^{(n)} t_1 \dots t_n$ und $\equiv t_1 t_2$ (Σ -)Ausdrücke.

2. Induktionsschritt Sind φ_1, φ_2 (Σ -)Ausdrücke und ist v ein Variablensymbol, so sind auch $\neg \varphi_1$, $\wedge \varphi_1 \varphi_2$, $\vee \varphi_1 \varphi_2$, $\rightarrow \varphi_1 \varphi_2$ und $\leftrightarrow \varphi_1 \varphi_2$, sowie $\exists v \varphi_1$ und $\forall v \varphi_1$ (Σ -)Ausdrücke.

3. Abschluß Eine Zeichenreihe ist nur dann ein Ausdruck, wenn dies auf Grund von 1. oder 2. der Fall ist. $\square$

Notation: $\text{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$ bezeichne die Menge aller (Σ^-) -Ausdrücke.

Folgerung 2.3 Ist $X \cup \Sigma_F \cup \Sigma_R$ endlich, so ist $\text{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$ eine präfixfreie deterministisch kontextfreie Sprache.

Definition 2.3 [Teilterme, Teilausdrücke] Es sei $w \in T[X, \Sigma_F] \cup \text{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$.

1. Ein Infix u von w heißt *Teilterm* von w , falls u selbst wieder Term ist.
2. Ein Infix u von w heißt *Teilausdruck* von w , falls u selbst wieder Ausdruck ist. $\square$

Folgerung 2.4 Zu jedem $w = w_1 \cdots w_l \in T[X, \Sigma_F] \cup \text{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$ und zu jeder Position $i \leq |w|$, kann man effektiv den kleinsten Teilterm bzw. -ausdruck von w bestimmen, der w_i enthält und die Position i überdeckt.

Wirkungsbereiche von Quantoren

Definition 2.4 Es sei $\psi = w_1 \cdots w_l \in \text{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$, und es sei $w_i w_{i+1} = Qv$. Der *Wirkungsbereich* des Quantors Qv von der Position i aus ist der kleinste Teilausdruck von ψ , der die Position i enthält. $\square$

Folgerung 2.5 Es sei ψ ein Ausdruck. Eine Variable v ist genau dann *frei* in ψ , wenn sie in ψ an einer Stelle vorkommt, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors Qv liegt.

Definition 2.5 Ein Term $t \in T[X, \Sigma_F]$ heißt *frei* für $v \in X$ in $\psi \in \text{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$ falls für alle $v_i \in \text{Var}(t)$ die Variable v an allen Stellen, an denen sie frei in ψ vorkommt, nicht im Wirkungsbereich eines Quantors Qv_i liegt. $\square$

2.1.4 Freie und gebundene Variablen

Variable in Termen

1. Variablensymbole $\text{Var}(v_i) := \{v_i\}$

2. Konstantensymbole $\text{Var}(c_i) := \emptyset$

3. zusammengesetzte Terme $\text{Var}(f_j^{(n)} t_1 \dots t_n) := \bigcup_{i=1}^n \text{Var}(t_i)$

ψ	$\text{frei}(\psi)$	$\text{geb}(\psi)$	Bemerkung
$R^{(n)} t_1 \dots t_n$	$\bigcup_{i=1}^n \text{Var}(t_i)$	$\emptyset$	auch für $\equiv$
$\neg \varphi$	$\text{frei}(\varphi)$	$\text{geb}(\varphi)$	
$\circ \varphi_1 \varphi_2$	$\text{frei}(\varphi_1) \cup \text{frei}(\varphi_2)$	$\text{geb}(\varphi_1) \cup \text{geb}(\varphi_2)$	$\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
$Qv \varphi$	$\text{frei}(\varphi) \setminus \{v\}$	$\text{geb}(\varphi) \cup \{v\}$	$Q \in \{\forall, \exists\}$
	$\text{Var}(\psi) := \text{frei}(\psi) \cup \text{geb}(\psi)$		

2.2 Semantik der Prädikatenlogik

Syntax	Interpretation	Semantik
Term oder Ausdruck	wird interpretiert in	Menge M mit „Struktur“
Individuensymbol	wird interpretiert als	Element von M
Funktionensymbol	wird interpretiert als	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Funktion von } M \text{ nach } M, \text{ d.h.} \\ \text{Operation auf } M \end{array} \right.$
Relationensymbol	wird interpretiert als	
		Relation über M
Menge M mit „Struktur“	erscheint als	Σ -Struktur
nur für Terme	$\longrightarrow$	Algebra
für Ausdrücke (und Terme)	$\longrightarrow$	Algebra + Relationen

2.2.1 Σ -Strukturen

Definition 2.6 Eine (Σ_F, Σ_R) -Struktur ist ein Paar $S = (M, V_S)$, falls

1. $M \neq \emptyset$ eine Menge ist,
2. $V_S : \Sigma \rightarrow M \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \mid f : M^n \rightarrow M\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{R \mid R \subseteq M^n\}$, wobei gilt:
 - (a) Ist c Konstante aus Σ , so ist $V_S(c) \in M$.
 - (b) Ist $f^{(n)}$ Funktionssymbol aus Σ , so ist $V_S(f^{(n)})$ n -stellige Funktion von M in M (n -stellige Operation auf M).
 - (c) Ist $R^{(n)}$ Relationssymbol aus Σ , so ist $V_S(R^{(n)})$ n -stellige Relation über M . $\square$

Wichtig: Σ -Strukturen $S = (M, V_S)$ für $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$

Definition 2.7 [Belegung von Variablen]

Es sei $S = (M, V_S)$ eine Σ -Struktur.

Eine Abbildung $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \rightarrow M$ heißt *Belegung* der Variablen. $\square$

Notation: Ist $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \rightarrow M$ eine Belegung so setzen wir

$$\beta \frac{a}{v}(y) := \begin{cases} \beta(y) & , \text{ für } y \neq v \text{ und} \\ a & , \text{ für } y = v. \end{cases}$$

Σ -Interpretation (Teil 1)

Definition 2.8 [Σ -Interpretation der Terme]

Es seien $S = (M, V_S)$ eine Σ -Struktur und $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \rightarrow M$ eine Belegung.

Wir nennen $\mathcal{I}_\beta : T[X, \Sigma_F] \rightarrow M$ eine Σ -Interpretation der Terme, falls

für eine Variable v : $\mathcal{I}_\beta(v) := \beta(v)$,

für eine Konstante c : $\mathcal{I}_\beta(c) := V_S(c)$ sowie

für einen zusammengesetzten Term $ft_1 \dots t_n$:

$$\mathcal{I}_\beta(ft_1 \dots t_n) := V_S(f)(\mathcal{I}_\beta(t_1), \dots, \mathcal{I}_\beta(t_n)) \text{ gelten.} \quad \square$$

Notation:

$$(\mathcal{I}_\beta) \frac{a}{v} := \mathcal{I}_{(\beta \frac{a}{v})}$$

Σ -Interpretation (Teil 2)

Definition 2.9 [Σ -Interpretation der Ausdrücke] Es seien $S = (M, V_S)$ eine Σ -Struktur und $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \rightarrow M$ eine Belegung.

Wir nennen eine Abbildung $\mathcal{I}_\beta$ der Σ -Ausdrücke in die Algebra

$(\{0, 1\}, \max, \min, 1 - (\cdot), 0, 1)$ eine Σ -Interpretation der Ausdrücke, falls

für atomare Ausdrücke $Rt_1 \dots t_n$: genau dann $\mathcal{I}_\beta(Rt_1 \dots t_n) = 1$ gilt, wenn $(\mathcal{I}_\beta(t_1), \dots, \mathcal{I}_\beta(t_n)) \in V_S(R)$ ist,

und für alle Σ -Ausdrücke φ_1, φ_2 die Beziehungen

für die Junktoren $\neg, \vee$ und $\wedge$: $\mathcal{I}_\beta(\neg \varphi_1) := 1 - \mathcal{I}_\beta(\varphi_1)$,

$\mathcal{I}_\beta(\varphi_1 \vee \varphi_2) := \max\{\mathcal{I}_\beta(\varphi_1), \mathcal{I}_\beta(\varphi_2)\}$ und

$\mathcal{I}_\beta(\varphi_1 \wedge \varphi_2) := \min\{\mathcal{I}_\beta(\varphi_1), \mathcal{I}_\beta(\varphi_2)\}$, sowie

für die Quantoren $\exists, \forall$: $\mathcal{I}_\beta(\exists v \varphi_1) := \max\{\mathcal{I}_\beta \frac{a}{v}(\varphi_1) \mid a \in M\}$ und

$\mathcal{I}_\beta(\forall v \varphi_1) := \min\{\mathcal{I}_\beta \frac{a}{v}(\varphi_1) \mid a \in M\}$ gelten. $\square$

Lemma 2.6 Es seien $S = (M, V_S)$ eine Σ -Struktur und $\beta : X \rightarrow M$ eine Belegung, und es sei $F_S := \{f \mid (f, n) \in \Sigma_F \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller in Σ auftretenden Funktionen- (und Konstanten-)symbole.

Dann ist $\mathcal{I}_\beta$ ein Homomorphismus der Termalgebra $(T[X, \Sigma_F], F_S)$ in die Algebra $(M, \{V_S(f) : f \in F_S\})$.

Lemma 2.7 Es seien $S = (M, V_S)$ eine Σ -Struktur und $\beta : X \rightarrow M$ eine Belegung, und es sei $R_S := \{R \mid (R, n) \in \Sigma_R \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller in Σ auftretenden Relationensymbole.

Dann ist $\mathcal{I}_\beta$ ein Homomorphismus der Algebra $(\{Rt_1 \dots t_n \mid t_i \in T[X, \Sigma_F]\}, \wedge, \vee, \neg)$ in die Algebra $(\{0, 1\}, \min, \max, 1 - (\cdot))$.

Lemma 2.8 Für alle Φ und alle φ gilt genau dann $\Phi \models \varphi$, wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ **nicht** erfüllbar ist.

Folgerung 2.9 Ein Ausdruck φ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg\varphi$ **nicht** erfüllbar ist.

Definition 2.13 [Semantische Äquivalenz]

Zwei Ausdrücke φ und ψ heißen *semantisch äquivalent* ($\varphi \approx \psi$), falls sowohl $\varphi \models \psi$ als auch $\psi \models \varphi$ gelten, d.h. es gilt für alle Σ -Strukturen $S = (M, V_S)$ und alle Belegungen $\beta : X \rightarrow M$ genau dann $\mathcal{I}_\beta(\varphi) = 1$ wenn $\mathcal{I}_\beta(\psi) = 1$ gilt. $\square$

Satz 2.10 (Ersetzbarkeitstheorem) Es sei $\varphi \approx \psi$.

Ist φ ein Teilausdruck von χ und entsteht χ' aus χ durch Ersetzen eines Vorkommens von φ durch ψ , so ist auch $\chi' \approx \chi$.

2.2.2 Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Definition 2.10 Eine Menge von Σ -Ausdrücken Φ heißt genau dann *erfüllbar*, wenn es eine Σ -Struktur $S = (M, V_S)$, eine Belegung $\beta : X \rightarrow M$ und eine Σ -Interpretation $\mathcal{I}_\beta$ derart gibt, dass $\mathcal{I}_\beta(\varphi) = 1$ für alle Ausdrücke aus $\varphi \in \Phi$ erfüllt ist.

Wir sagen dann auch, $\mathcal{I}_\beta$ sei *Modell* für (von) Φ . $\square$

Definition 2.11 Es sei Φ eine Menge von Ausdrücken, und es sei φ ein Ausdruck. Wir sagen, φ *folgt* aus Φ (kurz: $\Phi \models \varphi$), falls jede Interpretation $\mathcal{I}_\beta$, die Modell für Φ ist auch Modell von φ ist.

M.a.W., falls $\mathcal{I}_\beta(\psi) = 1$ für alle $\psi \in \Phi$ gilt, so muß auch $\mathcal{I}_\beta(\varphi) = 1$ gelten. $\square$

Definition 2.12 Ein Ausdruck φ heißt *allgemeingültig* (kurz: $\models \varphi$), falls $\emptyset \models \varphi$ gilt, d.h. $\mathcal{I}_\beta(\varphi) = 1$ für alle Σ -Strukturen $S = (M, V_S)$ und alle Belegungen $\beta : X \rightarrow M$ gilt. $\square$

Wichtige Äquivalenzen mit Quantoren

$$\begin{aligned} \neg\forall x \varphi &\approx \exists x \neg\varphi \\ \neg\exists x \varphi &\approx \forall x \neg\varphi \\ \forall x \varphi \wedge \forall x \psi &\approx \forall x (\varphi \wedge \psi) \\ \exists x \varphi \vee \exists x \psi &\approx \exists x (\varphi \vee \psi) \\ \forall x \forall y \varphi &\approx \forall y \forall x \varphi \\ \exists x \exists y \varphi &\approx \exists y \exists x \varphi \\ \exists x \forall y R(x, y) &\models \forall x \exists y R(y, x) \end{aligned}$$

für $x \notin \text{frei}(\psi)$ und $\circ \in \{\vee, \wedge\}$ gelten außerdem

$$\begin{aligned} (\forall x \varphi \circ \psi) &\approx \forall x (\varphi \circ \psi) \\ (\exists x \varphi \circ \psi) &\approx \exists x (\varphi \circ \psi) \end{aligned}$$

Lemma 2.11 [Koinzidenzlemma]

Es seien $S_i := (M_i, V_{S_i})$ Σ_i -Strukturen ($i = 1, 2$) über demselben Träger $M = M_1 = M_2$.

Weiter seien für $i = 1, 2$ die Abbildungen $\beta_i : X_i \rightarrow M$ Belegungen, $\mathfrak{I}_i$ die zugehörigen Interpretationen und $\Sigma := \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

1. Ist t ein Σ -Term und stimmen sowohl die V_{S_1} als auch die β_i für die in t auftretenden Symbole überein, so ist $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.
2. Ist φ ein Σ -Ausdruck und stimmen V_{S_1} und V_{S_2} für die in φ auftretenden Symbole aus Σ und β_1 und β_2 für die in φ frei auftretenden Variablen überein, so gilt genau dann $\mathfrak{I}_1(\varphi) = 1$, wenn $\mathfrak{I}_2(\varphi) = 1$ gilt.

Definition 2.14 [Σ -Redukt]

Sind Σ und Σ' Symbolmengen mit $\Sigma \subseteq \Sigma'$ und $S = (M, V_S)$ und $S' = (M, V_{S'})$ Σ - bzw. Σ' -Strukturen über demselben Träger M .

Ist V_S die Einschränkung von $V_{S'}$ auf Σ (kurz: $V_S = V_{S'}|_{\Sigma}$) sind, so nennen wir S ein Redukt von S' und umgekehrt S' eine Expansion von S .

Schreibweise: $S = S'|_{\Sigma}$

Folgerung 2.12 Ist $\Sigma \subseteq \Sigma'$, so ist eine Menge von Σ -Ausdrücken Φ genau dann bezüglich Σ erfüllbar, wenn Φ bezüglich Σ' erfüllbar ist.

Ein Σ -Satz ist ein Σ -Ausdruck ohne freie Variable.

Lemma 2.13 [Isomorphielemma]

Sind $S_i = (M_i, V_i)$, $i = 1, 2$, isomorphe Σ -Strukturen, so gilt für alle Σ -Sätze φ und alle Interpretationen $\mathfrak{I}_{\beta_i}$, $i = 1, 2$, genau dann $\mathfrak{I}_{\beta_1}(\varphi) = 1$ wenn $\mathfrak{I}_{\beta_2}(\varphi) = 1$.

Definition 2.15 [Substruktur] $S_i = (M_i, V_i)$, $i = 1, 2$, seien Σ -Strukturen. S_1 heißt *Substruktur* von S_2 (kurz: $S_1 \sqsubseteq S_2$) : $\Leftrightarrow$

1. $M_1 \subseteq M_2$
2. Für $R^{(n)} \in \Sigma$ ist $V_1(R^{(n)}) = V_2(R^{(n)}) \cap M_1^n$.
3. Für $f^{(n)} \in \Sigma$ ist $V_1(f^{(n)}) : M_1^n \rightarrow M_1$ die Einschränkung von $V_2(f^{(n)}) : M_2^n \rightarrow M_2$ auf M_1^n (d.h. $V_1(f^{(n)}) = V_2(f^{(n)}) \cap M_1^{n+1}$).
4. Für $c \in \Sigma$ ist $V_1(c) = V_2(c)$. □

Bemerkung: Ist $S_1 \sqsubseteq S_2$, so ist M_1 Σ -abgeschlossen in S_2 .

Lemma 2.14 Es seien $S_i = (M_i, V_i)$, $i = 1, 2$, Σ -Strukturen mit $S_1 \sqsubseteq S_2$, und es sei $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \rightarrow M_1$ eine Belegung. Dann gelten für jeden Σ -Term t die Beziehung $\mathfrak{I}_{1,\beta}(t) = \mathfrak{I}_{2,\beta}(t)$ und für jeden quantorenfreien Σ -Ausdruck φ genau dann $\mathfrak{I}_{1,\beta}(\varphi) = 1$ wenn $\mathfrak{I}_{2,\beta}(\varphi) = 1$.

Definition 2.16 [universelle Σ -Ausdrücke]

1. Induktionsanfang Atomare Σ -Ausdrücke sind *universelle (Σ -)Ausdrücke*.

2. Induktionsschritt Sind φ_1, φ_2 universelle (Σ -)Ausdrücke und ist v ein Variablensymbol, so sind auch $\wedge \varphi_1 \varphi_2$ und $\vee \varphi_1 \varphi_2$, sowie $\forall v \varphi_1$ *universelle (Σ -)Ausdrücke*.

3. Abschluß Eine Zeichenreihe ist nur dann ein universeller Ausdruck, wenn dies auf Grund von 1. oder 2. der Fall ist. □

Lemma 2.15 [Substrukturlemma] Es seien $S_i = (M_i, V_i)$, $i = 1, 2$, Σ -Strukturen mit $S_1 \sqsubseteq S_2$, und es sei $\varphi = \varphi(v_0, \dots, v_{\ell-1})$ ein universeller Σ -Ausdruck. Dann gilt für alle $a_0, \dots, a_{\ell-1} \in M_1$:

Aus $\mathfrak{I}_2(\varphi(a_0, \dots, a_{\ell-1})) = 1$ folgt $\mathfrak{I}_1(\varphi(a_0, \dots, a_{\ell-1})) = 1$.

Definition 2.17 [Simultane Substitution]

1. für Terme

$$\begin{aligned}
v \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} &:= \begin{cases} v & , \text{ falls } v \neq v_i \ (i = 0, \dots, \ell) \\ t_i & , \text{ falls } v = v_i \end{cases} \\
c \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} &:= c \\
(ft'_1 \dots t'_n) \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} &:= ft'_1 \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} \dots t'_n \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell}
\end{aligned}$$

Lemma 2.17 [Substitutionslemma]1. Für alle Terme t gilt

$$\mathfrak{I}\left(t \frac{t_0 \dots t_\ell}{v_0 \dots v_\ell}\right) = \mathfrak{I} \frac{\mathfrak{I}(t_0) \dots \mathfrak{I}(t_\ell)}{v_0 \dots v_\ell}(t).$$

2. Für alle Ausdrücke ϕ gilt genau dann

$$\mathfrak{I}\left(\phi \frac{t_0 \dots t_\ell}{v_0 \dots v_\ell}\right) = 1, \text{ wenn } \mathfrak{I} \frac{\mathfrak{I}(t_0) \dots \mathfrak{I}(t_\ell)}{v_0 \dots v_\ell}(\phi) = 1.$$

Hierbei sei $\mathfrak{I} \frac{\mathfrak{I}(t_0) \dots \mathfrak{I}(t_\ell)}{v_0 \dots v_\ell}(v) := \begin{cases} \mathfrak{I}(t_i) & , \text{ falls } v = v_i, \text{ und} \\ \mathfrak{I}(v) & , \text{ anderenfalls.} \end{cases}$

Folgerung 2.18

Es sei ϕ ein Ausdruck, und es seien β, β' Belegungen. Stimmen β und β' auf $\text{frei}(\phi)$ überein, so gilt $\mathfrak{I}_\beta(\phi) = \mathfrak{I}_{\beta'}(\phi)$.

2. für Ausdrücke

$$\begin{aligned}
(\equiv t'_1 t'_2) \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} &:= \equiv t'_1 \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} t'_2 \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} \\
(Rt'_1 \dots t'_n) \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} &:= Rt'_1 \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} \dots t'_n \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} \\
(\neg \phi) \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} &:= \neg \left(\phi \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} \right) \\
(\phi \circ \psi) \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} &:= \phi \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} \circ \psi \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} \\
(Qv\phi) \frac{t_0, \dots, t_\ell}{v_0, \dots, v_\ell} &:= Qu \left(\phi \frac{t_{i_1}, \dots, t_{i_r}, u}{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, v} \right)
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung seien $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$ diejenigen unter den $v_0, \dots, v_\ell$, für die $v_i \in \text{frei}(Qv\phi)$ und $v_i \neq t_i$, und u sei v , falls v nicht in $t_0, \dots, t_\ell$ auftritt, ansonsten sei u die erste nicht in $\phi, t_0, \dots, t_\ell$ vorkommende Variable.