2 Prädikatenlogik

2.1 Syntax der Prädikatenlogik der ersten Stufe

2.1.1 Symbole

(Individuen-)Variablensymbole:	$v_0, v_1, \ldots$
(Individuen-)Konstantensymbole:	$c_0, c_1, \ldots$
Funktionssymbole:	$f_0^{(n)}, f_1^{(n)}, \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots)$
Relationensymbole:	$R_0^{(n)}, R_1^{(n)}, \ldots \ (n = 1, 2, \ldots)$
spezielles Relationensymbol	$\equiv$
Junktoren:	$\neg\,, \wedge\,, \vee\,, \rightarrow\,, \leftrightarrow$
Quantoren:	$\exists\,, \forall$

2.1.2 Terme

funktionale Signatur: $\Sigma_F \subseteq \{\underbrace{(c_i, 0) \mid i \in \mathbb{N}}_{\text{Konstanten}}\} \cup \{\underbrace{(f_i^{(n)}, n) \mid i, n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1}_{\text{mehrstellige Funktionen}}\}$

Variablen: $X \subseteq \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

Definition 2.1 [Definition der prädikatenlogischen Terme]

1. Induktionsanfang (Atome) Variablensymbole und Konstantensymbole sind Terme.

2. Induktionsschritt Sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme und ist $f_j^{(n)}$ ein Funktionensymbol, so ist $f_j^{(n)} t_1 \ldots t_n$ ein (Σ-)*Term*.

3. Abschluß Eine Zeichenreihe ist nur dann ein Term, wenn dies auf Grund von $1.$ oder $2.$ der Fall ist. ❏

Folgerung 2.1 *Ist $X \cup \Sigma_F$ endlich, so ist $T[X, \Sigma_F]$ eine präfixfreie deterministisch kontextfreie Sprache.*

Beobachtung: Die Funktionssymbole $f_i^{(n)}$ $, n \geq 1,$ *operieren* wie folgt auf der Menge der Σ-Terme $T[X, \Sigma_F]$:

$$f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) := f_j^{(n)} t_1 \ldots t_n$$

Folgerung 2.2 *Die Menge aller Σ-Terme $T[X, \Sigma_F]$ bildet eine Algebra $\left(T[X, \Sigma_F], \{f_i^{(n)} \mid i, n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1\}\right)$ mit den Operationen $f_i^{(n)}$.*

2.1.3 Ausdrücke (Formeln)

relationale Signatur: $\Sigma_R \subseteq \{(R_i^{(n)}, n) \mid i, n \in \mathbb{N} \land n \geq 1\} \cup \{(\equiv, 2)\}$

Definition 2.2 [Definition der prädikatenlogischen Ausdrücke]

1. Induktionsanfang (Atome) Sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (Σ-)Terme und ist $R_j^{(n)}$ ein Relationensymbol, so sind $R_j^{(n)} t_1 \ldots t_n$ und $\equiv t_1 t_2$ (Σ-)*Ausdrücke*.

2. Induktionsschritt Sind φ_1, φ_2 (Σ-)Ausdrücke und ist v ein Variablensymbol, so sind auch $\neg\varphi_1$, $\land\varphi_1\varphi_2$, $\lor\varphi_1\varphi_2$, $\rightarrow \varphi_1\varphi_2$ und $\leftrightarrow \varphi_1\varphi_2$, sowie $\exists v\,\varphi_1$ und $\forall v\,\varphi_1$ (Σ-)*Ausdrücke*.

3. Abschluß Eine Zeichenreihe ist nur dann ein Ausdruck, wenn dies auf Grund von 1. oder 2. der Fall ist. ❏

Notation: $\mathrm{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$ bezeichne die Menge aller (Σ-)*Ausdrücke*.

Folgerung 2.3 *Ist $X \cup \Sigma_F \cup \Sigma_R$ endlich, so ist $\mathrm{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$ eine präfixfreie deterministisch kontextfreie Sprache.*

Definition 2.3 [Teilterme, Teilausdrücke] Es sei $w \in T[X, \Sigma_F] \cup \mathrm{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$.

1. Ein Infix u von w heißt *Teilterm* von w, falls u selbst wieder Term ist.
2. Ein Infix u von w heißt *Teilausdruck* von w, falls u selbst wieder Ausdruck ist. ❏

Folgerung 2.4 *Zu jedem $w = w_1 \cdots w_l \in T[X, \Sigma_F] \cup \mathrm{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$ und zu jeder Position $i \le |w|$, kann man effektiv den kleinsten Teilterm bzw. -ausdruck von w bestimmen, der w_i enthält und die Position i überdeckt.*

2.1.4 Freie und gebundene Variablen

Variable in Termen

1. Variablensymbole $Var(v_i) := \{v_i\}$

2. Konstantesymbole $Var(c_i) := \emptyset$

3. zusammengesetzte Terme $Var(f_j^{(n)} t_1 \dots t_n) := \bigcup_{i=1}^{n} Var(t_i)$

ψ	$frei(\psi)$	$geb(\psi)$	Bemerkung
$R^{(n)} t_1 \dots t_n$	$\bigcup_{i=1}^{n} Var(t_i)$	$\emptyset$	auch für $\equiv$
$\neg\,\varphi$	$frei(\varphi)$	$geb(\varphi)$	
$\circ\,\varphi_1 \varphi_2$	$frei(\varphi_1) \cup frei(\varphi_2)$	$geb(\varphi_1) \cup geb(\varphi_2)$	$\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
$\mathsf{Q} v\, \varphi$	$frei(\varphi) \setminus \{v\}$	$geb(\varphi) \cup \{v\}$	$\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\}$
	$Var(\psi) := frei(\psi) \cup geb(\psi)$		

Wirkungsbereiche von Quantoren

Definition 2.4 Es sei $\psi = w_1 \cdots w_l \in \mathsf{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$, und es sei $w_i w_{i+1} = \mathsf{Q}v$. Der *Wirkungsbereich* des Quantors $\mathsf{Q}v$ von der Position i aus ist der kleinste Teilausdruck von ψ, der die Position i enthält. ❏

Folgerung 2.5 *Es sei ψ ein Ausdruck. Eine Variable v ist genau dann frei in ψ, wenn sie in ψ an einer Stelle vorkommt, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors $\mathsf{Q}v$ liegt.*

Definition 2.5 Ein Term $t \in T[X, \Sigma_F]$ heißt frei für $v \in X$ in $\psi \in \mathsf{Ausd}[X, \Sigma_F, \Sigma_R]$ falls für alle $v_i \in Var(t)$ die Variable v an allen Stellen, an denen sie frei in ψ vorkommt, nicht im Wirkunsbereich eines Quantors $\mathsf{Q}v_i$ liegt. ❏

2.2 Semantik der Prädikatenlogik

Syntax	Interpretaion	Semantik
Term oder Ausdruck	*wird interpretiert in*	Menge M mit „Struktur“
Individuensymbol	*wird interpretiert als*	Element von M
Funktionensymbol	*wird interpretiert als*	Funktion von M nach M, d.h. Operation auf M
Relationensymbol	*wird interpretiert als*	Relation über M

Menge M mit „Struktur“	erscheint als	Σ-Struktur
nur für Terme	$\longrightarrow$	Algebra
für Ausdrücke (und Terme)	$\longrightarrow$	Algebra $+$ Relationen

2.2.1 Σ-Strukturen

Definition 2.6 Eine (Σ_F, Σ_R)-*Struktur* ist ein Paar $S = (M, V_S)$, falls

1. $M \neq \emptyset$ eine Menge ist,
2. $V_S : \Sigma \to M \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \mid f : M^n \to M\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{R \mid R \subseteq M^n\}$, wobei gilt:
   (a) Ist c Konstante aus Σ, so ist $V_S(c) \in M$.
   (b) Ist $f^{(n)}$ Funktionssymbol aus Σ, so ist $V_S(f^{(n)})$ n-stellige Funktion von M in M (n-stellige Operation auf M).
   (c) Ist $R^{(n)}$ Relationssymbol aus Σ, so ist $V_S(R^{(n)})$ n-stellige Relation über M. ❏

Wichtig: Σ-Strukturen $S = (M, V_S)$ für $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$

Definition 2.7 [Belegung von Variablen]
Es sei $S = (M, V_S)$ eine Σ-Struktur.

Eine Abbildung $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \to M$ heißt *Belegung* der Variablen. ❏

Notation: Ist $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \to M$ eine Belegung so setzen wir

$$\beta\frac{a}{v}(y) := \begin{cases} \beta(y) & \text{, für } y \neq v \text{ und} \\ a & \text{, für } y = v\,. \end{cases}$$

Σ-Interpretation (Teil 1)

Definition 2.8 [Σ-Interpretation der Terme]
Es seien $S = (M, V_S)$ eine Σ-Struktur und $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \to M$ eine Belegung.

Wir nennen $\mathfrak{I}_\beta : T[X, \Sigma_F] \to M$ eine Σ-*Interpretation der Terme*, falls

für eine Variable v: $\mathfrak{I}_\beta(v) := \beta(v)$,

für eine Konstante c: $\mathfrak{I}_\beta(c) := V_S(c)$ sowie

für einen zusammengesetzten Term $f t_1 \ldots t_n$:
$\mathfrak{I}_\beta(f t_1 \ldots t_n) := V_S(f)\big(\mathfrak{I}_\beta(t_1), \ldots, \mathfrak{I}_\beta(t_n)\big)$ gelten. ❏

Notation: $$\big(\mathfrak{I}_\beta\big)\tfrac{a}{v} := \mathfrak{I}_{\left(\beta \frac{a}{v}\right)}$$

Σ-Interpretation (Teil 2)

Definition 2.9 [**Σ-Interpretation der Ausdrücke**] Es seien $S = (M, V_S)$ eine Σ-Struktur und $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \to M$ eine Belegung.

Wir nennen eine Abbildung $\mathfrak{I}_\beta$ der Σ-Ausdrücke in die Algebra $\left(\{0,1\}, \max, \min, 1-(\cdot), 0, 1\right)$ eine Σ-*Interpretation der Ausdrücke*, falls

für atomare Ausdrücke $Rt_1 \dots t_n$: genau dann $\mathfrak{I}_\beta(Rt_1 \dots t_n) = 1$ gilt, wenn $\left(\mathfrak{I}_\beta(t_1), \dots, \mathfrak{I}_\beta(t_n)\right) \in V_S(R)$ ist,

und für alle Σ-Ausdrücke φ_1, φ_2 die Beziehungen

für die Junktoren $\neg, \vee$ und $\wedge$: $\mathfrak{I}_\beta(\neg\varphi_1) := 1 - \mathfrak{I}_\beta(\varphi_1)$,
$\mathfrak{I}_\beta(\vee\varphi_1\varphi_2) := \max\{\mathfrak{I}_\beta(\varphi_1), \mathfrak{I}_\beta(\varphi_2)\}$ und
$\mathfrak{I}_\beta(\wedge\varphi_1\varphi_2) := \min\{\mathfrak{I}_\beta(\varphi_1), \mathfrak{I}_\beta(\varphi_2)\}$, sowie

für die Quantoren $\exists, \forall$: $\mathfrak{I}_\beta(\exists v\,\varphi_1) := \max\{\mathfrak{I}_{\beta\frac{a}{v}}(\varphi_1) \mid a \in M\}$ und
$\mathfrak{I}_\beta(\forall v\,\varphi_1) := \min\{\mathfrak{I}_{\beta\frac{a}{v}}(\varphi_1) \mid a \in M\}$ gelten. ❑

Lemma 2.6 *Es seien $S = (M, V_S)$ eine Σ-Struktur und $\beta : X \to M$ eine Belegung, und es sei $F_S := \{ f \mid (f, n) \in \Sigma_F$ für ein $n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller in Σ auftretenden Funktionen- (und Konstanten-)symbole.*

Dann ist $\Im_\beta$ ein Homomorphismus der Termalgebra $(T[X, \Sigma_F], F_S)$ in die Algebra $(M, \{V_S(f) : f \in F_S\})$.

Lemma 2.7 *Es seien $S = (M, V_S)$ eine Σ-Struktur und $\beta : X \to M$ eine Belegung, und es sei $R_S := \{R \mid (R, n) \in \Sigma_R$ für ein $n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller in Σ auftretenden Relationensymbole.*

Dann ist $\Im_\beta$ ein Homomorphismus der Algebra $\Big(\big\{Rt_1 \dots t_n \mid t_i \in T[X, \Sigma_F]\big\}, \wedge, \vee, \neg\Big)$ in die Algebra $\big(\{0,1\}, \min, \max, 1-(\cdot)\big)$.

2.2.2 Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Definition 2.10 Eine Menge von Σ-Ausdrücken Φ heißt genau dann *erfüllbar*, wenn es eine Σ-Struktur $S = (M, V_S)$, eine Belegung $\beta : X \to M$ und eine Σ-Interpretation $\mathfrak{I}_\beta$ derart gibt, dass $\mathfrak{I}_\beta(\varphi) = 1$ für alle Ausdrücke aus $\varphi \in \Phi$ erfüllt ist.

Wir sagen dann auch, $\mathfrak{I}_\beta$ sei *Modell* für (von) Φ. ❏

Definition 2.11 Es sei Φ eine Menge von Ausdrücken, und es sei φ ein Ausdruck. Wir sagen, φ *folgt* aus Φ (kurz: $\Phi \models \varphi$), falls jede Interpretation $\mathfrak{I}_\beta$, die Modell für Φ ist auch Modell von φ ist.

M.a.W., falls $\mathfrak{I}_\beta(\psi) = 1$ für alle $\psi \in \Phi$ gilt, so muß auch $\mathfrak{I}_\beta(\varphi) = 1$ gelten. ❏

Definition 2.12 Ein Ausdruck φ heißt *allgemeingültig* (kurz: $\models \varphi$), falls $\emptyset \models \varphi$ gilt, d.h. $\mathfrak{I}_\beta(\varphi) = 1$ für alle Σ-Strukturen $S = (M, V_S)$ und alle Belegungen $\beta : X \to M$ gilt. ❏

Lemma 2.8 *Für alle Φ und alle φ gilt genau dann $\Phi \models \varphi$, wenn $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ **nicht** erfüllbar ist.*

Folgerung 2.9 *Ein Ausdruck φ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg\varphi$ **nicht** erfüllbar ist.*

Definition 2.13 [Semantische Äquivalenz]
Zwei Ausdrücke φ und ψ heißen *semantisch äquivalent* $(\varphi \approx \psi)$, falls sowohl $\varphi \models \psi$ als auch $\psi \models \varphi$ gelten, d.h. es gilt für alle Σ-Strukturen $S = (M, V_S)$ und alle Belegungen $\beta : X \to M$ genau dann $\mathfrak{I}_\beta(\varphi) = 1$ wenn $\mathfrak{I}_\beta(\psi) = 1$ gilt. ❑

Satz 2.10 (Ersetzbarkeitstheorem) *Es sei $\varphi \approx \psi$.*

Ist φ ein Teilausdruck von χ und entsteht χ' aus χ durch Ersetzen eines Vorkommens von φ durch ψ, so ist auch $\chi' \approx \chi$.

Wichtige Äquivalenzen mit Quantoren

$$\begin{aligned}
\neg\forall x\,\varphi &\approx \exists x\,\neg\varphi \\
\neg\exists x\,\varphi &\approx \forall x\,\neg\varphi \\
\forall x\,\varphi \wedge \forall x\,\psi &\approx \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \\
\exists x\,\varphi \vee \exists x\,\psi &\approx \exists x\,(\varphi \vee \psi) \\
\forall x \forall y\,\varphi &\approx \forall y \forall x\,\varphi \\
\exists x \exists y\,\varphi &\approx \exists y \exists x\,\varphi
\end{aligned}$$

$$\exists x \forall y\, R(x,y) \models \forall x \exists y\, R(y,x)$$

für $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$ und $\circ \in \{\vee, \wedge\}$ gelten außerdem

$$\begin{aligned}
(\forall x\,\varphi \circ \psi) &\approx \forall x\,(\varphi \circ \psi) \\
(\exists x\,\varphi \circ \psi) &\approx \exists x\,(\varphi \circ \psi)
\end{aligned}$$

Lemma 2.11 [Koinzidenzlemma]
Es seien $S_i := (M_i, V_{S_i})$ Σ_i-Strukturen $(i = 1,2)$ über demselben Träger $M = M_1 = M_2$.

Weiter seien für $i = 1,2$ die Abbildungen $\beta_i : X_i \to M$ Belegungen, $\mathfrak{I}_i$ die zugehörigen Interpretationen und $\Sigma := \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

1. *Ist t ein Σ-Term und stimmen sowohl die V_{S_i} als auch die β_i für die in t auftretenden Symbole überein, so ist $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$.*

2. *Ist φ ein Σ-Ausdruck und stimmen V_{S_1} und V_{S_2} für die in φ auftretenden Symbole aus Σ und β_1 und β_2 für die in φ* frei *auftretenden Variablen überein, so gilt genau dann $\mathfrak{I}_1(\varphi) = 1$, wenn $\mathfrak{I}_2(\varphi) = 1$ gilt.*

Definition 2.14 [Σ-Redukt]
Sind Σ und Σ' Symbolmengen mit $\Sigma \subseteq \Sigma'$ und $S = (M, V_S)$ und $S' = (M, V_{S'})$ Σ- bzw. Σ'-Strukturen über demselben Träger M.

Ist V_S die Einschränkung von $V_{S'}$ auf Σ (kurz: $V_S = V_{S'}|_\Sigma$) sind, so nennen wir S ein Redukt *von S' und umgekehrt S' eine* Expansion *von S.*
Schreibweise: $S = S'_{\upharpoonright\Sigma}$

Folgerung 2.12 *Ist $\Sigma \subseteq \Sigma'$, so ist eine Menge von Σ-Ausdrücken Φ genau dann bezüglich Σ erfüllbar, wenn Φ bezüglich Σ' erfüllbar ist.*

Ein Σ*-Satz* ist ein Σ-Ausdruck ohne freie Variable.

Lemma 2.13 [Isomorphielemma]
Sind $S_i = (M_i, V_i)$, $i = 1, 2$, isomorphe Σ-Strukturen, so gilt für alle Σ-Sätze φ und alle Interpretationen $\mathfrak{I}_{\beta_i}$, $i = 1, 2$, genau dann $\mathfrak{I}_{\beta_1}(\varphi) = 1$ wenn $\mathfrak{I}_{\beta_2}(\varphi) = 1$.

Definition 2.15 [Substruktur] $S_i = (M_i, V_i)$, $i = 1, 2$, seien Σ-Strukturen. S_1 heißt *Substruktur* von S_2 (kurz: $S_1 \sqsubseteq S_2$) :⇔

1. $M_1 \subseteq M_2$
2. Für $R^{(n)} \in \Sigma$ ist $V_1(R^{(n)}) = V_2(R^{(n)}) \cap M_1^n$.
3. Für $f^{(n)} \in \Sigma$ ist $V_1(f^{(n)}) : M_1^n \to M_1$ die Einschränkung von $V_2(f^{(n)}) : M_2^n \to M_2$ auf M_1^n (d.h. $V_1(f^{(n)}) = V_2(f^{(n)}) \cap M_1^{n+1}$).
4. Für $c \in \Sigma$ ist $V_1(c) = V_2(c)$. ❏

Bemerkung: Ist $S_1 \sqsubseteq S_2$, so ist M_1 Σ*-abgeschlossen* in S_2.

Lemma 2.14 *Es seien $S_i = (M_i, V_i)$, $i = 1, 2$, Σ-Strukturen mit $S_1 \sqsubseteq S_2$, und es sei $\beta : \{v_i : i \in \mathbb{N}\} \to M_1$ eine Belegung. Dann gelten für jeden Σ-Term t die Beziehung $\mathfrak{I}_{1,\beta}(t) = \mathfrak{I}_{2,\beta}(t)$ und für jeden quantorenfreien Σ-Ausdruck φ genau dann $\mathfrak{I}_{1,\beta}(\varphi) = 1$ wenn $\mathfrak{I}_{2,\beta}(\varphi) = 1$.*

Definition 2.16 [universelle Σ-Ausdrücke]

1. Induktionsanfang Atomare Σ-Ausdrücke sind *universelle (*Σ*-)Ausdrücke*.

2. Induktionsschritt Sind φ_1, φ_2 universelle (Σ-)Ausdrücke und ist v ein Variablensymbol, so sind auch $\wedge\varphi_1\varphi_2$ und $\vee\varphi_1\varphi_2$, sowie $\forall v\,\varphi_1$ *universelle (*Σ*-)Ausdrücke*.

3. Abschluß Eine Zeichenreihe ist nur dann ein universeller Ausdruck, wenn dies auf Grund von 1. oder 2. der Fall ist. ❏

Lemma 2.15 [Substrukturlemma] *Es seien* $S_i = (M_i, V_i)$, $i = 1, 2$, Σ*-Strukturen mit* $S_1 \sqsubseteq S_2$*, und es sei* $\varphi = \varphi(v_0, \ldots, v_{\ell-1})$ *ein universeller* Σ*-Ausdruck. Dann gilt für alle* $a_0, \ldots, a_{\ell-1} \in M_1$*:*

Aus $\mathfrak{I}_2(\varphi(a_0, \ldots, a_{\ell-1})) = 1$ *folgt* $\mathfrak{I}_1(\varphi(a_0, \ldots, a_{\ell-1})) = 1$*.*

Definition 2.17 [Simultane Substitution]

1. für Terme

$$v\frac{t_0,\ldots,t_\ell}{v_0,\ldots,v_\ell} \quad := \quad \begin{cases} v & \text{, falls } v \neq v_i \ (i = 0,\ldots,\ell) \\ t_i & \text{, falls } v = v_i \end{cases}$$

$$c\frac{t_0,\ldots,t_\ell}{v_0,\ldots,v_\ell} \quad := \quad c$$

$$(ft'_1\ldots t'_n)\frac{t_0,\ldots,t_\ell}{v_0,\ldots,v_\ell} \quad := \quad ft'_1\frac{t_0,\ldots,t_\ell}{v_0,\ldots,v_\ell}\ldots t'_n\frac{t_0,\ldots,t_\ell}{v_0,\ldots,v_\ell}$$

2. für Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
(\equiv t_1' t_2') \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} &\quad := \quad \equiv t_1' \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} \; t_2' \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} \\
(R t_1' \ldots t_n') \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} &\quad := \quad R t_1' \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} \ldots t_n' \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} \\
(\neg \varphi) \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} &\quad := \quad \neg \left(\varphi \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} \right) \\
(\varphi \circ \psi) \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} &\quad := \quad \varphi \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} \circ \psi \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} \\
(\mathsf{Q} v \varphi) \frac{t_0, \ldots, t_\ell}{v_0, \ldots, v_\ell} &\quad := \quad \mathsf{Q} u \left(\varphi \frac{t_{i_1}, \ldots, t_{i_r}, u}{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}, v} \right)
\end{aligned}
$$

In der letzten Gleichung seien $v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}$ diejenigen unter den $v_0, \ldots, v_\ell$, für die $v_i \in \mathit{frei}(\mathsf{Q} v \varphi)$ und $v_i \neq t_i$, und u sei v, falls v nicht in $t_0, \ldots, t_\ell$ auftritt, ansonsten sei u die erste nicht in $\varphi, t_0, \ldots, t_\ell$ vorkommende Variable.

Lemma 2.17 [Substitutionslemma]

1. Für alle Terme t gilt

$$\mathfrak{I}\left(t\,\frac{t_0 \ldots t_l}{v_0 \ldots v_l}\right) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_l)}{v_0 \ldots v_l}(t)\,.$$

2. Für alle Ausdrücke φ gilt genau dann

$$\mathfrak{I}\left(\varphi\,\frac{t_0 \ldots t_l}{v_0 \ldots v_l}\right) = 1\text{ , wenn }\ \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_l)}{v_0 \ldots v_l}(\varphi) = 1\,.$$

Hierbei sei $\mathfrak{I}\dfrac{\mathfrak{I}(t_0)\ldots\mathfrak{I}(t_l)}{v_0\ldots v_l}(v) := \begin{cases} \mathfrak{I}(t_i) & \text{, falls } v = v_i \text{ , und} \\ \mathfrak{I}(v) & \text{, anderenfalls.} \end{cases}$

Folgerung 2.18

Es sei φ ein Ausdruck, und es seien β, β' Belegungen. Stimmen β und β' auf $frei(\varphi)$ überein, so gilt $\mathfrak{I}_\beta(\varphi) = \mathfrak{I}_{\beta'}(\varphi)$.