1 Aussagenlogik

1.1 Syntax der Aussagenlogik

Symbole	Bezeichnungen
Aussagenvariablen	$A_0, A_1, \ldots, A_i, \ldots$
Aussagenkonstanten	$\mathbf{t}, \mathbf{f}$
Junktoren	$\vee,\ \wedge,\ \neg$
Klammern	$(,\ )$

Definition 1.1 [Ausdrücke als Terme mit Variablen]

Signatur: $\Sigma := \{\underbrace{(\mathbf{t}, 0), (\mathbf{f}, 0)}_{\text{Konstanten}},\ \underbrace{(\neg, 1),\ (\vee, 2), (\wedge, 2)}_{\text{Funktionen}}\}$

Variablen: $X := \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$

F ist *aussagenlogischer Ausdruck* falls $F \in \mathrm{Term}(\Sigma, X)$. ❑

Folgerung 1.1 *Die aussagenlogischen Ausdrücke bilden eine Termalgebra*

$$T(\Sigma, X) = \big(\mathrm{Term}(\Sigma, X), \{\vee, \wedge, \neg\,, \mathbf{f}, \mathbf{t}\}\big)\,.$$

Schreibweise: $(F \wedge G)$ für $\wedge\,(F, G)$,

$(F \vee G)$ für $\vee\,(F, G)$ und

$\neg\, F$ für $\neg(F)$

Abkürzungen: $(F \rightarrow G)$ für $(\neg\, F \vee G)$ und

$(F \leftrightarrow G)$ für $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$

1.2 Semantik der Aussagenlogik

Lemma 1.2 *Die Algebren*

$$\left(\left\{\emptyset,\{\emptyset\}\right\},\cup,\cap,\overline{},\emptyset,\{\emptyset\}\right) \text{ und } \left(\left\{0,1\right\},\max,\min,1-(\cdot),0,1\right)$$

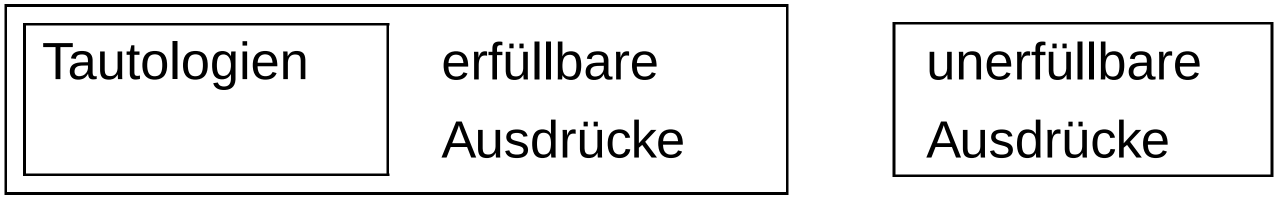
sind zueinander isomorph.

Definition 1.2 [Belegung] Eine Abbildung $\beta : \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \to \{0,1\}$ heißt *Belegung* der (Aussagen-)Variablen. ❏

Definition 1.3 [Interpretation]
Ist β eine Belegung, so nennen wir den Homomorhismus $\mathfrak{I}_\beta$ der Termalgebra $\left(\text{Term}(\Sigma, X), \vee, \wedge, \neg, \mathbf{f}, \mathbf{t}\right)$ in die Algebra $\left(\left\{0,1\right\},\max,\min,1-(\cdot),0,1\right)$, welcher $\mathfrak{I}_\beta(A_i) = \beta(A_i)$ erfüllt, eine *Interpretation* der Ausdrücke bei der Belegung β. ❏

Definition 1.4 Ein Ausdruck F heißt

1. *erfüllbar*, falls es eine Belegung β mit $\mathfrak{I}_\beta(F) = 1$ gibt,[a]
2. *allgemeingültig* (oder *eine Tautologie*), falls $\mathfrak{I}_\beta(F) = 1$ für alle Belegungen β gilt.
3. *falsifizierbar*, falls es eine Belegung β mit $\mathfrak{I}_\beta(F) = 0$ gibt ❑



Satz 1.3 *Es sei F ein Ausdruck. Dann gelten die folgenden Beziehungen.*

1. F *ist genau dann allgemeingültig, wenn* $\neg F$ *unerfüllbar ist, und*
2. F *ist genau dann erfüllbar, wenn* $\neg F$ *falsifizierbar ist.*

---

[a] Eine Interpretation $\mathfrak{I}_\beta$ mit $\mathfrak{I}_\beta(F) = 1$ für $F \in \mathcal{F}$ nennt man auch ein *Modell* für $\mathcal{F}$.

Definition 1.5 Ein Ausdruck G heißt *Folgerung* der Formelmenge $\mathcal{F}$, falls für jede Belegung β, die $\mathfrak{I}_\beta(F) = 1$ für alle $F \in \mathcal{F}$ erfüllt, auch $\mathfrak{I}_\beta(G) = 1$ gilt. ❑

Schreibweise: $\mathcal{F} \models G$

Folgerung 1.4 *Es seien* $F_1, \ldots, F_k, G$ *Ausdrücke. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$,
2. $\left((\bigwedge_{i=1}^{k} F_i) \to G\right)$ *ist eine Tautologie, und*
3. $\left((\bigwedge_{i=1}^{k} F_i) \wedge \neg G\right)$ *ist unerfüllbar.*

1.3 Semantische Äquivalenz

Definition 1.6 Zwei Ausdrücke F, G heißen *semantisch äquivalent* (kurz: $F \equiv G$), falls $\mathfrak{I}_\beta(F) = \mathfrak{I}_\beta(G)$ für alle Belegungen β gilt. ❏

Folgerung 1.5 *Es seien F, G zwei Ausdrücke. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. F *und* G *sind semantisch äquivalent.*
2. $F \models G$ *und* $G \models F$.
3. $(F \leftrightarrow G)$ *ist eine Tautologie.*

Satz 1.6 (Ersetzbarkeitstheorem) *Es sei $F \equiv G$.*

Ist F ein Teilausdruck von H und entsteht H' aus H durch Ersetzen eines Vorkommens von F durch G, so ist auch $H' \equiv H$.

1.3.1 Normalformen

Definition 1.7

1. Ein Ausdruck der Form A_i oder $\neg A_i$ heißt *Literal*.

2. Ein Ausdruck F ist genau dann in *konjunktiver Normalform,* wenn F die Form
$$F = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$$
hat, wobei die L_{ij} Literale sind.

3. Ein Ausdruck G ist genau dann in *disjunktiver Normalform*, wenn G die Form
$$G = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right)$$
hat, wobei die L_{ij} Literale sind. ❏

Folgerung 1.7 *Es gilt genau dann*

$$F \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{ij} \right), \textit{ wenn } \neg F \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} \neg L_{ij} \right).$$

Lemma 1.8 *Zu jedem Ausdruck F gibt es einen äquivalenten Ausdruck G in konjunktiver (disjunktiver) Normalform, der höchstens dieselben Variablen wie F benutzt.*

1.3.2 Der Endlichkeitssatz für die Erfüllbarkeit der Aussagenlogik

Satz 1.9 (Endlichkeitssatz) *Eine Menge $\mathcal{F}$ von Ausdrücken ist genau dann erfüllbar, wenn jede ihrer endlichen Teilmengen erfüllbar ist.*

Beweis. **Input** $\mathcal{F}$

Select Repräsentantensystem $\mathcal{G} = \bigcup_{i=0}^{\infty} M(A_0, \ldots, A_i)$

$\mathcal{I} := \left\{\beta \mid \beta : \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \to \{0,1\}\right\}$

$i := 0$

While $i < \infty$ **do** $\mathcal{K} := \left\{\beta \mid \beta \in \mathcal{I}, \beta(A_i) = 1, \mathfrak{I}_\beta(M(A_0, \ldots, A_i)) = 1\right\}$

If $|\mathcal{K}| = \infty$ $\quad \mathcal{I} := \mathcal{K}$

Else $\quad \mathcal{I} := \mathcal{I} \setminus \mathcal{K}$

$i := i + 1$

q.e.d.