5 Arithmetik

Es sei $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, 0, \sigma, +, \cdot)$ die übliche Arithmetik mit den Operationen 0, σ (Nachfolger $\sigma(x) = x+1$), $+$ und $\cdot$, und es seien $\Sigma_{\mathrm{Ar}} = \{(0,0),(\sigma,1),(+,2),(\cdot,2)\}$ und $\mathfrak{I}_{\mathfrak{N}}$ die dazugehörige Signatur und Interpretation.

$\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}} := \{\varphi : \varphi \text{ ist } \Sigma_{\mathrm{Ar}}\text{-Satz und } \mathfrak{I}_{\mathfrak{N}}(\varphi) = 1\}$

Definition 5.1 Zwei Σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen *elementar äquivalent* $:\Leftrightarrow$ Es gibt Interpretationen $\mathfrak{I}_{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{I}_{\mathfrak{B}}$ derart, dass $\mathfrak{I}_{\mathfrak{A}}(\varphi) = \mathfrak{I}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ für jeden Σ-Satz φ gilt. ❑

Satz 5.1 (Satz von Skolem) *Es gibt ein abzählbares Nichtstandardmodell von $\mathfrak{N}$, d.h., es gibt eine abzählbare, zu $\mathfrak{N}$ elementar äquivalente Σ_{Ar}-Struktur, die nicht zu $\mathfrak{N}$ isomorph ist.*

Definition 5.2 [PEANOsches Axiomensystem]

$\varphi_1 = \forall v_0 \forall v_1\ (\sigma v_0 \equiv \sigma v_1 \to v_0 \equiv v_1)$ $\qquad$ $\varphi_2 = \forall v_0\ \neg \sigma v_0 \equiv 0$

$\varphi_3 = \forall v_0\ (\neg v_0 \equiv 0 \to \exists v_1\ v_0 \equiv \sigma v_1)$ $\qquad$ $\varphi_4 = \forall v_0\ v_0 + 0 \equiv v_0$

$\varphi_5 = \forall v_0 \forall v_1\ v_0 + \sigma v_1 \equiv \sigma(v_0 + v_1)$ $\qquad$ $\varphi_6 = \forall v_0\ v_0 \cdot 0 \equiv 0$

$\varphi_7 = \forall v_0 \forall v_1\ v_0 \cdot \sigma v_1 \equiv (v_0 \cdot v_1) + v_0$

Induktionsaxiom: *Für jeden Σ_{Ar}-Ausdruck $\psi = \psi(y_1, \ldots, y_n, x)$ gilt*

$\varphi_\psi = \forall y_1 \ldots \forall y_n \left((\psi\frac{0}{x} \wedge \forall x(\psi \to \psi\frac{\sigma x}{x})) \to \forall v \psi \right)$. ❑

Das PEANOsche Axiomensystem $\mathrm{PA} = \{\varphi_i : i = 1, \ldots, 7\} \cup \{\varphi_\psi : \psi \text{ ist } \Sigma_{\mathrm{Ar}}\text{-Ausdruck}\}$ definiert eine Arithmetik $\mathfrak{T}_{\mathrm{PA}} = \{\varphi : \varphi \text{ ist } \Sigma_{\mathrm{Ar}}\text{-Satz und } \mathrm{PA} \vdash \varphi\}$, für die $\mathfrak{T}_{\mathrm{PA}} \subseteq \mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$ gilt.

$\mathfrak{T}_{\mathrm{PA}}$ ist aufzählbar, während $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$ vollständig ist.

Lemma 5.2 *Zu jeder k-bändrigen Turing-Maschine $\mathfrak{M}$ über $\{0,1\}$ kann man effektiv einen Σ_{Ar}-Ausdruck $\chi_{\mathfrak{M}}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k)$ angeben, für den genau dann $\mathfrak{I}_{\mathfrak{N}}(\chi_{\mathfrak{M}}(\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_k}, \overline{m_1}, \ldots, \overline{m_k})) = 1$ gilt, wenn $\mathfrak{M}$, angesetzt auf die Eingabe $(l_1, \ldots, l_k)$, mit der Ausgabe $(m_1, \ldots, m_k)$ anhält.*

Lemma 5.3 (Lemma über die GÖDELsche β-Funktion)
Es gibt eine Funktion $\beta : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit:

1. *Zu jeder endlichen Folge $(a_0, \ldots, a_\ell)$ über $\mathbb{N}$ gibt es Werte $r, p \in \mathbb{N}$ derart, daß $\beta(r,p,i) = a_i$ für $i \leq \ell$.*
2. *Es gibt einen Σ_{Ar}-Ausdruck $\varphi_\beta(v_0, v_1, v_2, v_3)$ derart, dass für alle $r, p, i, a \in \mathbb{N}$ genau dann $\mathfrak{I}_{\mathfrak{N}}(\varphi_\beta(r,p,i,a)) = 1$ gilt, wenn $\beta(r,p,i) = a$.*

Zum Beweis von Lemma 5.2

Die Turing-Maschine $\mathfrak{M} = (\{0,1\}, \{0,1\}, \{0,1,\ldots,k_{\mathfrak{M}}\}, 0, 0, \delta, \{k_{\mathfrak{M}}\})$ hält genau dann bei Eingabe $l_1, \ldots, l_k$ mit Ausgabe $m_1, \ldots, m_k$ an, wenn es Konfigurationen $(\vec{\lambda}_i, z_i, \vec{\rho}_i) \in \mathbb{N}^k \times \{0,1,\ldots,k_{\mathfrak{M}}\} \times \mathbb{N}^k$ mit der folgenden Eigenschaft gibt:

$$\exists u \exists (z_t)_{t=0}^{u} \exists (\vec{\lambda}_t)_{t=0}^{u} \exists (\vec{\rho}_t)_{t=0}^{u} \Big(z_0 \equiv \overline{0} \wedge \vec{\lambda}_0 \equiv \vec{0} \wedge \vec{\rho}_0 \equiv (\overline{l}_1, \ldots, \overline{l}_k) \wedge \forall t \big(t < u \to \Delta(z_t, \vec{\lambda}_t, \vec{\rho}_t, z_{t+1}, \vec{\lambda}_{t+1}, \vec{\rho}_{t+1}) \big) \wedge z_u \equiv \overline{k}_{\mathfrak{M}} \wedge \vec{\lambda}_u \equiv \vec{0} \wedge \vec{\rho}_u \equiv (\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_k) \Big)$$

Diese Formel ist kein Σ_{Ar}-Ausdruck der Prädikatenlogik erster Stufe, da über (endliche) Folgen von Variablen quantifiziert wird.

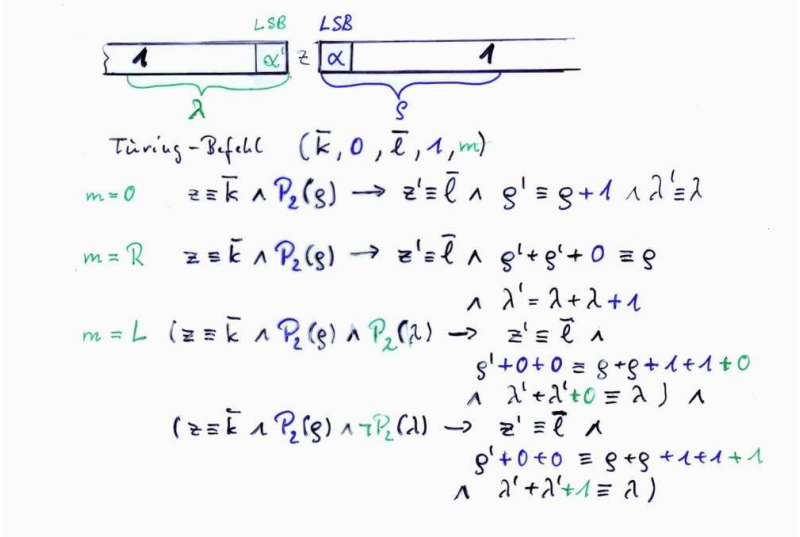

Abbildung 1: Zur Konstruktion des Σ_{Ar}-Ausdrucks Δ im Beweis von Lemma 5.2

Folgerung 5.4 *1. Zu jeder rekursiven Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ gibt es einen Σ_{Ar}-Ausdruck $\varphi(y_1,\ldots,y_k)$ derart, dass genau dann $(\ell_1,\ldots,\ell_k) \in R$ wenn $\mathfrak{I}_{\mathfrak{N}}(\varphi(\overline{\ell}_1,\ldots,\overline{\ell}_k)) = 1$.*

2. Zu jeder rekursiven Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt es einen Σ_{Ar}-Ausdruck $\psi(y_1,\ldots,y_k,y)$ derart, dass genau dann $f(\ell_1,\ldots,\ell_k) = \ell$ wenn $\mathfrak{I}_{\mathfrak{N}}(\psi(\overline{\ell}_1,\ldots,\overline{\ell}_k,\overline{\ell})) = 1$.

Bemerkung: Insbesondere gilt bei 2.
$\mathfrak{I}_{\mathfrak{N}}\big(\exists y(\psi(\overline{\ell}_1,\ldots,\overline{\ell}_k,y) \wedge \forall v(\psi(\overline{\ell}_1,\ldots,\overline{\ell}_k,v) \to v \equiv y)\big) = 1$.

5.1 Die GÖDELschen Unvollständigkeitssätze

Definition 5.3 1. Eine Relation $\mathfrak{Q} \subseteq \mathbb{N}^k$ heißt *repräsentierbar* in Φ, falls es einen Σ_{Ar}-Ausdruck $\varphi(y_1,\ldots,y_k)$ derart gibt, dass für alle $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$ gilt:

Wenn $(n_1,\ldots,n_k) \in \mathfrak{Q}$, so $\Phi \vdash \varphi(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k})$, und

wenn $(n_1,\ldots,n_k) \notin \mathfrak{Q}$, so $\Phi \vdash \neg\varphi(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k})$.

Wir sagen dann, Φ *repräsentiere* $\mathfrak{Q}$.

2. Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt *repräsentierbar* in Φ, falls es einen Σ_{Ar}-Ausdruck $\varphi(y_1,\ldots,y_k,y)$ derat gibt, dass für alle $n_1,\ldots,n_k,n \in \mathbb{N}$ gilt:

Wenn $f(n_1,\ldots,n_k) = n$, so $\Phi \vdash \varphi(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k},\overline{n})$,

wenn $f(n_1,\ldots,n_k) \neq n$, so $\Phi \vdash \neg\varphi(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k},\overline{n})$

und $\Phi \vdash \exists^{=1} y\varphi(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k},y)$.

Wir sagen dann, Φ *repräsentiere* f. ❑

Lemma 5.5 *Es seien Φ,Ψ Mengen von Σ_{Ar}-Ausdrücken.*

1. *Ist Φ nicht widerspruchsfrei, so ist jede Relation und jede Funktion in Φ repräsentierbar.*
2. *Gilt $\Phi \subseteq \Psi$, so sind alle in Φ repräsentierbaren Relationen und Funktionen auch in Ψ repräsentierbar.*
3. *Ist Φ widerspruchsfrei und entscheidbar, so ist jede in Φ repräsentierbare Relation rekursiv entscheidbar und jede in Φ repräsentierbare Funktion rekursiv.*

Definition 5.4 Wir sagen, Φ *erlaube Repräsentierungen*, wenn alle rekursiven (berechenbaren) Funktionen in Φ repräsentierbar sind. ❑

Lemma 5.6 *Die Arithmetiken $\mathfrak{T}_{\mathfrak{N}}$ und $\mathfrak{T}_{\mathrm{PA}}$ erlauben Repräsentierungen.*

Satz 5.7 (1. GÖDELscher Unvollständigkeitssatz)
Φ sei widerspruchsfrei und erlaube Repräsentierungen. Dann gibt es einen Satz der Arithmetik Φ derart, dass weder $\Phi \vdash \varphi$ noch $\Phi \vdash \neg\varphi$ gelten.

Definition 5.5 Es sei Φ eine Menge von Σ-Ausdrücken und es sei φ ein Σ-Ausdruck. Es gelte $\mathrm{Abl}_\Phi(\varphi)$ genau dann, wenn es eine Ableitung mit letzter Zeile $\Gamma \quad \varphi$ und „Γ“ $\subseteq \Phi$ gibt. ❑

Satz 5.8 (2. GÖDELscher Unvollständigkeitssatz)
Es sei $\mathrm{wfrei}_\Phi := \neg\mathrm{Abl}_\Phi(\neg 0 \equiv 0)$.
Ist Φ widerspruchsfrei, entscheidbar und erlaubt Φ Repräsentierungen, so gilt nicht $\Phi \vdash \mathrm{wfrei}_\Phi$.

6 Die Prädikatenlogik zweiter Stufe

Satz 6.1 *In der Prädikatenlogik der zweiten Stufe gilt der Endlichkeitssatz nicht:*
Eine Menge von Ausdrücken ist nicht notwendig erfüllbar, wenn jede ihrer endlichen Teilmengen erfüllbar ist.

Satz 6.2 (Nichtvollständigkeit der Logik zweiter Stufe) *Die Menge der allgemeingültigen Σ_∞-Sätze ist nicht aufzählbar.*

6.1 Die Arithmetik zweiter Stufe

Axiome der Arithmetik der zweiten Stufe

(P1) $\forall v(\neg\sigma v \equiv 0)$
(P2) $\forall v\forall y(\sigma v \equiv \sigma y \to v \equiv y)$
(P3) $\forall Y(Y(0) \wedge \forall v(Y(v) \to Y(\sigma v)) \to \forall y Y(y))$

Satz 6.3 (Dedekind) *Jede Σ-Struktur (M, m_0, f), die die PEANOschen Axiome der zweiten Stufe erfüllt, ist zu $(\mathbb{N}, 0, +1)$ isomorph.*

Lemma 6.4 *In der eingeschränkten monadischen Arithmetik der zweiten Stufe* (**S1S**) *sind die Relationen $\leq$, $=$ und $<$ definierbar, d.h., es gibt Σ-Ausdrücke $\varphi_\leq(t,u)$, $\varphi_=(t,u)$ und $\varphi_<(t,u)$ derart, dass $\varphi_\leq(\overline{m},\overline{n})$ genau dann ein Satz der* **S1S** *ist, wenn $m \leq n$ gilt.*

6.2 Die Entscheidbarkeit der eingeschränkten[a] monadischen[b] Arithmetik der zweiten Stufe

Definition 6.1 Es sei X ein Alphabet. $\xi \in X^\omega :\iff \xi : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to X$. ❑

Definition 6.2 Es sei $\mathfrak{A} = (X, Z, z_0, \delta, Z_f)$ ein endlicher (nichtdeterministischer) Automat.

Eine Sequenz $((\xi(i), z_i))_{i=1}^\infty$ heißt *Lauf* von $\mathfrak{A}$ auf $\xi \in X^\omega$, falls $(z_{i-1}, \xi(i), z_i)$ für alle $i = 1, 2, \ldots$ gilt. ❑

Definition 6.3 Eine Teilmenge $F \subseteq X^\omega$ wird von einem endlichen Automaten (X, Z, z_0, δ, Z_f) im Sinne von BÜCHI akzeptiert, falls genau dann $\xi \in F$ gilt, wenn es einen Lauf $((\xi(i), z_i))_{i=1}^\infty$ auf ξ gibt, für den $z_i \in Z_f$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ gilt. ❑

[b] Nur die Nachfogefunktion σ, aber keine Addition ist erlaubt.
[b] Nur Quantifizierung über einstellige Prädikatenvariablen ist erlaubt.

Codierung von Automaten

Es sei (X, Z, z_0, δ, Z_f) ein endlicher Automat mit
$X \subseteq \{0,1\}^m$, $Z \subseteq \{0,1\}^k$, $z_0 \in Z$, $Z_f \subseteq Z$ und $\delta \subseteq Z \times X \times Z$.

Notation: $\varphi^{\mathbf{a}} := \begin{cases} \neg\varphi & \text{, falls } \mathbf{a} = 0 \\ \varphi & \text{, anderenfalls.} \end{cases}$

Ist $z = (a_1, \ldots, a_k)$, so heißt

$$\chi_z(Y_1, \ldots, Y_k, t) := Y_1(t)^{\mathbf{a}_1} \wedge \ldots \wedge Y_k(t)^{\mathbf{a}_k}$$

„*der Automat befindet sich zum Zeitpunkt t im Zustand z*“.

Es sei $(z, \alpha, z') \in \delta$, $\alpha \in X$, $\chi_\alpha(X_1, \ldots, X_m, t) = X_1(t)^{a_1} \wedge \ldots \wedge X_m(t)^{a_m}$ für $\alpha = (\mathfrak{a}_1, \ldots, a_m)$. Dann beschreibt der Ausdruck
$\lambda(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_k) := \chi_{z_0}(Y_1, \ldots, Y_k, 0) \wedge$
$\forall t\big(\bigvee_{(z,\alpha,z') \in \delta} \chi_z(Y_1, \ldots, Y_k, t) \wedge \chi_\alpha(X_1, \ldots, X_m, t+1) \wedge \chi_{z'}(Y_1, \ldots, Y_k, t+1)\big)$
einen Lauf des Automaten.

Satz 6.5 *Für jeden endlichen Automaten $\mathfrak{M} = (X, Z, z_0, \delta, Z_f)$ mit $X \subseteq \{0,1\}^m$ und $Z \subseteq \{0,1\}^k$ beschreibt der Ausdruck*

$$\begin{aligned} &\varphi_{\mathfrak{M}}(X_1, \ldots, X_m) := \\ &\quad \exists Y_1 \ldots \exists Y_k (\lambda(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_k) \wedge \\ &\quad \forall t \exists u (\varphi_{\leq}(t,u) \wedge \bigvee_{z \in Z_f} \chi_z(Y_1, \ldots, Y_k, u))) \end{aligned}$$

die von $\mathfrak{M}$ akzeptierte ω-Sprache.

Satz 6.6 (Büchi)
Es seien $F_1, F_2 \subseteq X^\omega$ und $E \subseteq (X \times X')^\omega$ durch Büchi-Automaten akzeptierbare Mengen von ω-Wörtern. Dann sind auch $F_1 \cap F_2$, $F_1 \cup F_2$, $X^\omega \setminus F_1$ sowie $\mathrm{pr}(E)$ durch Büchi-Automaten akzeptierbar.

Hierbei sei $\mathrm{pr}(((a_i, b_i))_{i=1}^\infty) = (a_i)_{i=1}^\infty$.

Lemma 6.7 *Zu jeder $\mathrm{S1S}$-Formel φ kann man eine äquivalente $\mathrm{S1S}$-Formel φ' konstruieren, die nur atomare Bestandteile der Form $x \equiv y$, $x \equiv y+1$ und $X(t)$ enthält.*

Umwandlung von $\mathrm{S1S}$-Formeln in $\mathrm{S1S_0}$-Formeln.

Definition 6.4 [$\mathrm{S1S_0}$-Formel]

1. $X \subseteq Y$, $\mathrm{Sing}(X)$ und $\mathrm{Succ}(X,Y)$ sind (atomare) $\mathrm{S1S_0}$-Formeln.
2. Sind φ, ψ $\mathrm{S1S_0}$-Formeln, so sind auch $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, sowie $\exists X\, \varphi$ und $\forall X\, \varphi$ $\mathrm{S1S_0}$-Formeln. ❑

$$\begin{aligned} X \subseteq Y &:\Longleftrightarrow \forall t(X(t) \to Y(t)) \\ \mathrm{Sing}(X) &:\Longleftrightarrow \exists Z\big(Z \subseteq X \wedge \neg X \subseteq Z \wedge \forall Y(Y \subseteq X \to Y = X \vee Y = Z)\big) \\ \mathrm{Succ}(X,Y) &:\Longleftrightarrow \mathrm{Sing}(X) \wedge \mathrm{Sing}(Y) \wedge \forall t(X(t) \to Y(t+1)) \end{aligned}$$

Satz 6.8 *Es sei φ eine $\mathrm{S1S}$-Formel. Dann ist es entscheidbar, ob φ allgemeingültig, erfüllbar oder widersprüchlich ist.*

Satz 6.9 *Zu jeder $\mathrm{S1S}$-Formel der Form $\varphi(X_1, \ldots, X_m)$ kann man eine äquivalente der Form $\exists Y_1 \ldots \exists Y_k \varphi'(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_k)$, bei der in φ' nur Quantoren über Individuenvariablen vorkommen, konstruieren.*

6.3 X^ω als metrischer Raum

Definition 6.5 Es sei für $\xi, \eta \in X^\omega$ (d.h. $\xi, \eta : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to X$)

$$\rho(\xi,\eta) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } \xi = \eta \\ \max\{2^{-n} : \xi(n) \neq \eta(n)\}, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$ ❑

Lemma 6.10 *(X^ω, ρ) ist ein kompakter metrischer Raum.*

Zum Beweis:
$$\begin{aligned} \rho(\xi,\eta) &= 0 \iff \xi = \eta, \\ \rho(\xi,\eta) &= \rho(\eta,\xi), \\ \rho(\xi,\zeta) &\leq \max\{\rho(\xi,\eta),\rho(\eta,\zeta)\} \quad \text{und} \end{aligned}$$
Jede Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Definition 6.6
$$\begin{aligned} \mathbf{pref}(\xi) &:= \{w : w \in X^* \wedge w \sqsubset \xi\} \\ \mathbf{pref}(F) &:= \bigcup_{\eta \in F} \mathbf{pref}(\eta) \end{aligned}$$ ❑

Lemma 6.11 *Eine Teilmenge $F \subseteq X^\omega$ ist genau dann abgeschlossen, wenn aus $\mathbf{pref}(\xi) \subseteq \mathbf{pref}(F)$ auch $\xi \in F$ folgt.*

Lemma 6.12 *Wird eine Teilmenge $F \subseteq X^\omega$ von einem* BÜCHI*-Automaten akzeptiert, so ist $\mathbf{pref}(F)$ eine reguläre Sprache.*

Lemma 6.13 *Ist eine Teilmenge $F \subseteq X^\omega$ abgeschlossen und wird von einem* BÜCHI*-Automaten akzeptiert, so gibt es einen* BÜCHI*-Automaten der Form (X, Z, z_0, δ, Z), d.h. mit $Z_f = Z$, der F akzeptiert.*

Folgerung 6.14 *Eine* S1S*-Formel $\varphi(X_1, \ldots, X_m)$ beschreibt genau dann eine abgeschlossene Teilmenge von $\{0,1\}^m$ wenn sie äquivalent zu einer* S1S*-Formel der Form $\exists Y_1 \ldots \exists Y_k \forall t\, \varphi'(X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_k, t)$ mit quantorenfreiem φ' ist.*

Quadratzahlen:
$$\begin{aligned} \mathrm{Sq}(Y) := Y(0) \wedge Y(1) \wedge \\ \forall t \forall u (t < u \wedge Y(t) \wedge Y(u) \wedge \forall v (t < v < u \to \neg Y(v)) \to \\ \exists w (Y(w) \wedge \forall v (u < v < w \to \neg Y(v)) \wedge w + t = 2u + 2)) \end{aligned}$$

t ist Quadrat:
$$\mathrm{sq}(t) := \exists Y (\mathrm{Sq}(Y) \wedge Y(t))$$

$t = u^2$:
$$\begin{aligned} \mathrm{sqeq}(t,u) := \mathrm{sq}(t) \wedge \exists v \Big(\mathrm{sq}(v) \wedge t < v \wedge \\ \forall w (t < w < v \to \neg \mathrm{sq}(w)) \wedge t + 2u + 1 = v) \Big) \end{aligned}$$

$t = u \cdot v$:
$$\begin{aligned} \mathrm{m}(t,u,v) := \exists w \exists x \exists y \exists z \Big(u + v = w \wedge \mathrm{sqeq}(x,w) \wedge \\ \mathrm{sqeq}(y,u) \wedge \mathrm{sqeq}(z,v) \wedge x = y + z + 2t \Big) \end{aligned}$$

7 Temporale Logik LTL

Syntax: Aufbau aus Aussagevariablen $p_1, ..., p_n$ mit den üblichen Junktoren und den temporalen Operatoren $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{U}$ und $\mathbf{X}$.

Semantik: Interpretation in unendlichen Wörtern $\xi \in \left(\{0,1\}^k\right)^\omega$ mit einer „jetzt“-Position

Definition 7.1 [Semantik der LTL]
Für φ und $\xi \in \left(\{0,1\}^k\right)^\omega$ seien:

- $(\xi, j) \models p_i :\Longleftrightarrow \xi_i(j) = 1$
- $(\xi, j) \models \neg\varphi :\Longleftrightarrow (\xi, j) \not\models \varphi$, analog für $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- $(\xi, j) \models \mathbf{G}\varphi :\Longleftrightarrow$ für alle $k \geq j$ gilt $(\xi, k) \models \varphi$
- $(\xi, j) \models \mathbf{F}\varphi :\Longleftrightarrow$ für ein $k \geq j$ gilt $(\xi, k) \models \varphi$
- $(\xi, j) \models \mathbf{X}\varphi :\Longleftrightarrow (\xi, j+1) \models \varphi$
- $(\xi, j) \models \varphi \mathbf{U} \psi :\Longleftrightarrow$ es gibt ein $k \geq j$ derart, dass $(\xi, k) \models \psi$ und $(\xi, k') \models \varphi$ für alle $k',\ j \leq k' < k$.

$L(\varphi) := \{\xi : (\xi, 1) \models \varphi\}$ ist die durch φ definierte ω-Sprache. ❑