Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger
Dipl.-Inform. J. Mielke

D–06120 Halle (Saale)
Von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714
Tel. 0345/55 24715

14. Übung zur Vorlesung „Informationstheoretische Probleme der Informatik“

Sommersemester 2007 05.06.2006

Abgabe: keine

Aufgabe 14.1: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass jede abgeschlossene Menge im (X^ω, ρ) eine $\mathbf{G}_\delta$–Menge ist.

Aufgabe 14.2: (4 Punkte)

Es sei $\xi \in X^\omega$ ein zufälliges ω-Wort und $\xi = \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\ldots$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\zeta = \xi_n\xi_{n+1}\xi_{n+2}\xi_{n+3}\ldots$ ebenfalls zufällig.

(b) Für jedes $w \in X^*$ ist auch $\zeta = w \cdot \xi$ zufällig.

Aufgabe 14.3: (4 Punkte)

Es sei $\xi \in X^\omega$. Zeigen Sie: Wenn eine Konstante c existiert, so dass $\mathrm{K}(\xi[0..n]) \geq_{\text{i.o.}} n - c$ gilt, so existiert eine Konstante c', so dass $\mathrm{K}(\xi[0..n]/n) \geq_{\text{i.o.}} n - c'$ ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Abschätzung $\mathrm{K}(\xi[0..n]) \leq \mathrm{K}(\xi[0..n]/n) + 2 \cdot |n - \mathrm{K}(\xi[0..n]/n)| + c''$. Warum ist diese Ungleichung korrekt?

Aufgabe 14.4: (4 Punkte)

Es sei $X = \{0, 1\}$. Wir nennen ein $\xi \in X^\omega$ rekursiv aufzählbar, falls die Menge $M_\xi := \{n \mid \xi(n) = 1\}$ rekursiv aufzählbar ist. Zeigen Sie:

$$\mathrm{K}(\xi[0..n]) \leq \log_2 n + c$$