

13. Übung zur Vorlesung „Informationstheoretische Probleme der Informatik“

Sommersemester 2007

28.06.2006

Abgabe: 05.07.2007

Aufgabe 13.1:

(4 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Ungleichung:

$$\text{KP}(w/\langle v, \text{KP}(v) \rangle) \leq \text{KP}(w/v) + O(1)$$

Warum ist der zweite Teil von Lemma 6.23 damit bewiesen?

Eine Menge heißt *offen*, wenn sie Vereinigung offener Kugeln ist. Eine Menge heißt *abgeschlossen*, wenn sie Komplement einer offenen ist.

Aufgabe 13.2:

(4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass eine beliebige Vereinigung offener Mengen offen ist, und dass der Durchschnitt zweier (endlich vieler) offener Mengen offen ist.
- (b) Geben Sie eine Familie $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ offener Mengen so an, dass $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i$ nicht offen ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die offenen Kugeln im (X^ω, ρ) auch abgeschlossen sind.

Ein metrischer Raum heißt *kompakt*, wenn jede unendliche Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 13.3:

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass (X^ω, ρ) kompakt ist, d.h. für jede Folge $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ existieren $(\xi_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ und $\zeta \in X^\omega$, so dass $\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_{i_j} = \zeta$, d.h. $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho(\xi_{i_j}, \zeta) = 0$.

Eine Menge M heißt *zusammenhängend*, wenn es keine offenen Mengen O_1 und O_2 mit $O_i \cap M \neq \emptyset, i = 1, 2$ gibt, so dass $O_1 \cup O_2 \supseteq M$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Eine Menge heißt *total unzusammenhängend*, wenn sie keine zusammenhängende Teilmenge enthält.

Aufgabe 13.4:

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass (X^ω, ρ) total unzusammenhängend ist.