

9. Übung zur Vorlesung „Informationstheoretische Probleme der Informatik“

Sommersemester 2007

31.05.2006

Abgabe: 07.06.2007

Aufgabe 9.1:

(4 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) Eine Funktion ist genau dann partiell-rekursiv, wenn ihr Graph rekursiv aufzählbar ist.
- (b) Es existieren nur abzählbar viele partiell-rekursive Funktionen von X^* nach X^*
- (c) Eine unendliche Menge ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn es für sie eine eindeutige aufzählende rekursive Funktion gibt.
- (d) Eine unendliche Menge ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn es für sie eine monotone aufzählende rekursive Funktion gibt.

Aufgabe 9.2:

(4 Punkte)

Beweisen Sie, dass eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ genau dann *links berechenbar* ist, wenn die Menge $\{(\alpha, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q} \wedge \varepsilon < \alpha\}$ rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 9.3:

(6 Punkte)

Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ und $\alpha = \sum_{i \in M} 2^{-(i+1)}$. Zeigen Sie:

- (a) α ist genau dann berechenbar reell, wenn M rekursiv ist.
- (b) Ist M rekursiv aufzählbar, so existiert eine monoton nicht fallende rekursive Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \alpha$.

Hinweis: Man benutze Aufgabe 9.1.

Aufgabe 9.4:

(4 Punkte)

Eine Funktion $\psi : X^* \times X^* \rightarrow X^*$ heißt Präfixfunktion, wenn für jedes (π, v) und (π', v) aus $\text{dom}(\psi)$ gilt, dass $\pi = \pi'$ oder π und π' sind unvergleichbar, d.h. $\pi \not\sqsubseteq \pi'$ und $\pi' \not\sqsubseteq \pi$. Sei φ eine optimale solche Funktion, dann ist $\text{KP}(x, y) = K_\varphi(x, y)$.

- (a) Zeigen Sie, dass es eine optimale derartige Präfixfunktion φ gibt.
- (b) Beweisen Sie die Ungleichung: $\text{KP}(x, y) \leq \text{KP}(x) + \text{KP}(y) + O(1)$