Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger
Dipl.-Inform. J. Mielke

D–06120 Halle (Saale)
Von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714
Tel. 0345/55 24715

6. Übung zur Vorlesung „Informationstheoretische Probleme der Informatik"

Sommersemester 2007 10.05.2006

Abgabe: 17.05.2007

Aufgabe 6.1: (6 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine Kompressionsfunktion f derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\min\{K_f(w) \mid |w| = n\} \preceq \log_r n$ und $\max\{K_f(w) \mid |w| = n\} \succeq n$

(b) Zu jeder Kompressionsfunktion f mit $\min\{|f(w)| \mid |w| = n\} \preceq \log_r n$, für jedes $n \in \mathbb{N}$, gibt es eine Konpressionsfunktion h derart, dass $f \not\preceq h$ und $h \not\preceq f$ ist.

(c) Es gibt keine optimale Kompressionsfunktion.

Für eine Sprache $W \subseteq X^*$ nennen wir die durch $s_W(l) := |\{w : w \in W \wedge |w| = l\}|$ definierte Funktion $s_W : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die *Strukturfunktion*.

Aufgabe 6.2: (4 Punkte)

Es sei $W \subseteq X^*$ rekursiv aufzählbar. Zeigen Sie, dass es eine partiell-rekursive Kompressionsfunktion $\psi : X^* \to X^*$ mit $\forall w\,(|\psi(w)| \leq 2 \cdot \log_r |w| + \lceil \log_r s_W(|w|) \rceil + 2)$ gibt.
Leiten Sie daraus die Beziehung $K(w) \leq 2 \cdot \log_r |w| + \log_r s_W(|w|) + c$ für alle $w \in W$ und geeignetes c ab.

Aufgabe 6.3: (3 Punkte)

Leiten Sie aus den Tatsachen, dass es unendliche viele n mit $K'(n) \geq \lfloor \log_r n \rfloor$ gibt und dass jede natürliche Zahl n als Produkt von Primzahlen der Form $\prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$ dargestellt werden kann, die Existenz von unendlich vielen Primzahlen her.

Aufgabe 6.4: (4 Punkte)

Es sei $\varphi : X^* \to X^*$ eine injektive partiell-rekursive Funktion. Zeigen Sie, daß für alle $w \in \mathrm{dom}(\varphi)$ die Beziehung $|K(w) - K(\varphi(w))| \leq \mathit{const}$ gilt.