Institut für Informatik
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. L. Staiger
Dipl.-Inform. J. Mielke

D–06120 Halle (Saale)
Von-Seckendorff-Platz 1
Tel. 0345/55 24714
Tel. 0345/55 24715

5. Übung zur Vorlesung „Informationstheoretische Probleme der Informatik“

Sommersemester 2007 03.05.2006

Abgabe: 10.05.2007

Aufgabe 5.1: (4 Punkte)

Es seien $n > 0$ und G eine durch

$$S \to a \mid b \cdot S^n$$

gegebene kontextfreie Grammatik. Zeigen Sie, daß die Sprache $L(G)$ ein Präfix-Code ist.

Aufgabe 5.2: (4 Punkte)

Ein Code $C \subseteq X^*$ heißt *voll*, wenn es zu jedem $w \in X^*$ eine eindeutig bestimmte Folge $v_1, v_2 \ldots, v_n$ von Codewörtern und ein Präfix $u \in X^*$ eines Codewortes mit $w = v_1 v_2 \cdots v_n u$ gibt. Zeigen Sie:

(a) Jeder volle Code ist ein Präfix-Code.

(b) Ein endlicher Präfix-Code mit der maximalen Codewortlänge m ist genau dann voll, wenn jedes Wort $w \in X^m$ ein Codewort ist oder ein Codewort als Präfix besitzt.

Wir nennen eine Funktion $f\colon X^* \to X^*$ eine *Kompressionsfunktion* falls f injektiv ist. In diesem Kontext ist dann $f(w)$ das *Komprimat* des *Textes* $w \in X^*$. Für f existiert mithin eine *Dekompressionsfunktion* $\varphi\colon X^* \to X^*$ mit der Eigenschaft $\forall w(w \in X^* \to \varphi(f(w)) = w)$.

Aufgabe 5.3: (3 Punkte)

Berechnen Sie obere Schranken für den Anteil aller Wörter der Länge l, die um den Betrag $c \in \mathbb{N}$ komprimiert werden, d.h. für den Wert $\dfrac{|\{w : w \in X^* \wedge |w| = l \wedge |f(w)| \leq l - c\}|}{r^l}$.

Aufgabe 5.4: (4 Punkte)

Die Kompressionsfunktion f sei rekursiv. Zeigen Sie, dass dann die Mengen aller maximal bzw. minimal komprimierbaren Wörter

$$\begin{aligned} L_{\text{komp}} &:= \{w : w \in X^* \wedge \forall v\,(v \in X^* \wedge |w| = |v| \to |f(w)| \leq |f(v)|)\} \text{ bzw.} \\ L_{\text{n-komp}} &:= \{w : w \in X^* \wedge \forall v\,(v \in X^* \wedge |w| = |v| \to |f(w)| \geq |f(v)|)\} \end{aligned}$$

ebenfalls rekursiv sind.