4. Übung zur Vorlesung „Informationstheoretische Probleme der Informatik“

Sommersemester 2007

26.04.2006

Abgabe: 03.05.2007

Aufgabe 4.1: (3 Punkte)

Konstruieren Sie einen unendlichen binären Präfixcode $C = \{w_i : i \in \mathbb{N}\}$ mit $|w_i| \approx \log_2(i+1) + 2 \cdot \log_2 \log_2(i+1)$.

Aufgabe 4.2: (4 Punkte)

Es sei $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow [0, 1]$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, wobei wir der Einfachheit halber $\pi(i) \geq \pi(i+1)$ annehmen. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an π für die Existenz eines n -elementigen Präfixcodes $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ mit

$$\sum_{i=1}^n \pi(i) \cdot |w_i| = - \sum_{i=1}^n \pi(i) \cdot \log_r \pi(i)$$

an. Wie sehen die Werte $|w_i|$ aus? (Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 2.4 benutzen.)

Aufgabe 4.3: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{T}(W) := \{v : \exists w, v_1, v_2 (w \in W \wedge v_1, v_2 \in X^* \wedge v_1 \cdot v \cdot v_2 = w)\}$$

ein topologischer Hüllenoperator auf X^* ist, d.h.

$$\forall W \subseteq X^* \quad W \subseteq \mathbf{T}(W) \tag{1}$$

$$\forall W, V \subseteq X^* \quad W \subseteq V \rightarrow \mathbf{T}(W) \subseteq \mathbf{T}(V) \tag{2}$$

$$\forall W \subseteq X^* \quad \mathbf{T}(W) = \mathbf{T}(\mathbf{T}(W)) \tag{3}$$

$$\llbracket \forall W, V \subseteq X^* \quad \mathbf{T}(W \cup V) = \mathbf{T}(W) \cup \mathbf{T}(V) \rrbracket \tag{4}$$

Aufgabe 4.4: (3 Punkte)

Es seien X ein Alphabet und $V, W \subseteq X^*$. Man zeige:

- (a) $V \cup W$ ist genau dann dicht, wenn V oder W dicht ist.
- (b) Ist V dicht und W nicht dicht, so ist $V \setminus W$ dicht.

Aufgabe 4.5:

(4 Punkte)

Es sei $C \subseteq X^*$ ein endlicher maximaler Präfixcode und $P = \{v : \exists a(a \in X^+ \wedge va \in C)\}$ sei die Menge der echten Präfixe von C . Zeigen Sie: $|C| - 1 = |P|(|X| - 1)$.