7 Komplexität unendlicher Wörter

7.1 X^ω als CANTORscher Raum

Metrik: $\rho(\eta,\xi) := \inf\{r^{-|w|} : w \sqsubset \eta \wedge w \sqsubset \xi\}$

Kugeln in (X^ω,ρ)**:** $w \cdot X^\omega = \{\eta : w \sqsubset \eta\}$

Durchmesser: $\operatorname{diam} w \cdot X^\omega = r^{-|w|}$

Beziehungen zum Einheitsintervall (r-näre Entwicklung)

$$0{,}\eta \in [0,1] \subseteq \mathbb{R} \qquad \longleftrightarrow \qquad \eta \in X^\omega$$

$$|0{,}\eta - 0{,}\xi| \leq \rho(\eta,\xi)$$

Beispiel

$$\tfrac{1}{5} \quad \longleftrightarrow \quad 00110011\ldots \quad \text{für } r = 2\text{, aber}$$

$$\tfrac{1}{5} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} 19999\ldots \\ 20000\ldots \end{cases} \quad \text{für } r = 10$$

□

Satz 7.1 *Ist* $|X|$ *endlich, so ist* (X^ω,ρ) *ein kompakter metrischer Raum.*

Definition 7.1 Eine Teilmenge $F \subseteq X^\omega$ heißt $\mathbf{G}_\delta$-*Menge* $:\Longleftrightarrow$
Es gibt eine abzählbare Familie von offenen Mengen $(E_i)_{i\in\mathbf{N}}$ derart, dass

$$F = \bigcap_{i\in\mathbf{N}} E_i \quad \text{gilt.}$$

Satz 7.2 *Es sei* $F \subseteq X^\omega$.

1. F *ist genau dann offen in* (X^ω,ρ) *wenn es ein* $W \subseteq X^*$ *mit* $F = W \cdot X^\omega$ *gibt.*
2. F *ist genau dann abgeschlossen, wenn aus* $\mathbf{A}(\xi) \subseteq \mathbf{A}(F)$ *stets* $\xi \in F$ *folgt.*
3. F *ist genau dann* $\mathbf{G}_\delta$*-Menge in* (X^ω,ρ)*, wenn es ein* $V \subseteq X^*$ *mit*

$$F = \{\xi : \xi \in X^\omega \wedge |\mathbf{A}(\xi) \cap V| = \aleph_0\} \quad \textit{gibt.}$$

Das Lebesgue-Maß auf (X^ω,ρ)

Definition 7.2 Das Lebesgue-Maß auf (X^ω,ρ) ist die durch $\lambda(w \cdot X^\omega) := r^{-|w|}$ auf den Kugeln definierte Mengenfunktion, die in üblicher Weise auf die meßbaren Teilmengen des metrischen Raumes (X^ω,ρ) ausgedehnt wird.

Folgerung 7.3

1. *Ist* $W \subseteq X^*$ *präfix-frei, so ist* $\lambda(W \cdot X^\omega) = \sum_{w\in W} r^{-|w|}$.
2. *Ist* $F \subseteq X^\omega$ *abgeschlossen, so gilt* $\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \sum_{w\in\mathbf{A}(F)\cap X^n} r^{-|w|}$.
3. *Ist* $F \subseteq X^\omega$ *eine* $\mathbf{G}_\delta$*-Menge, so ist genau dann* $\lambda(F) = 0$ *wenn es ein* $V \subseteq X^*$ *mit* $F = \{\xi : \xi \in X^\omega \wedge |\mathbf{A}(\xi) \cap V| = \aleph_0\}$ *derart gibt, dass* $\lim_{n\to\infty} \lambda(\{v : v \in V \wedge |v| > n\} \cdot X^\omega) = 0$ *gilt.*

7.2 Zufällige Reelle Zahlen

Satz 7.4 (MARTIN-LÖF) *Für jedes* $\xi \in X^\omega$ *gibt es ein* $c \in \mathbb{N}$ *und unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *derart, dass* $\mathbf{K}(\xi[0..n]) \leq n - \log_r n + c$.

Effektive Nullmengen in (X^ω,ρ)

Definition 7.3 Eine Teilmenge $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{N} \times X^*$ heißt MARTIN-LÖF-*Test*, falls $\mathcal{V}$ rekursiv aufzählbar ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\lambda(\{v : (n,v) \in \mathcal{V}\} \cdot X^\omega) \leq r^{-n}$ gilt.

Wir setzen $V_n := \{v : (n,v) \in \mathcal{V}\}$.

Folgerung 7.5 *Es sei* $\mathcal{V}$ *ein* MARTIN-LÖF-*Test. Dann gelten:*

1. $\lambda(\bigcap_{i\in\mathbf{N}} V_i \cdot X^\omega) = 0$,
2. *auch* $\{(n,w) : \exists v(v \sqsubseteq w \wedge (n,v) \in \mathcal{V})\}$ *ist ein* MARTIN-LÖF-*Test.*
3. *Es einen* MARTIN-LÖF-*Test* $\mathcal{W}$ *derart, dass für alle* $i \in \mathbb{N}$ *die Menge* W_i *präfix-frei ist und* $\lambda(V_i \cdot X^\omega) = \lambda(W_i \cdot X^\omega)$ *gilt.*

Satz 7.6 *Es gibt einen universellen* Martin-Löf-*Test, d.h. einen* Martin-Löf-*Test* $\mathcal{U}$ *derart, dass für alle* Martin-Löf-*Tests* $\mathcal{V}$ *die Beziehung* $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i \cdot X^\omega \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i \cdot X^\omega$ *erfüllt ist.*

Definition 7.4 Ein ω-Wort $\xi \in X^\omega$ heißt *zufällig* $:\Longleftrightarrow$ $\xi \notin \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i \cdot X^\omega$.

Definition 7.5 Ein ω-Wort $\xi \in X^\omega$ heißt *rekursiv* (oder: *berechenbar*) $:\Longleftrightarrow$ die Abbildung $f_\xi : \mathbb{N} \to X^*$ mit $\{f_\xi(n)\} = \mathbf{A}(\xi) \cap X^n$ ist rekursiv.

Folgerung 7.7 *1.* $\lambda(X^\omega \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i \cdot X^\omega) = 1$

2. *Kein rekursives ω-Wort ist zufällig.*
3. *Enthält eine der Mengen* $\{n : \xi(n) = x\}$, $(x \in X)$, *eine unendliche rekursive Teilmenge, so ist ξ ist nicht zufällig.*

Lemma 7.8 *Ist $\xi \in X^\omega$ nicht zufällig, so ist die Differenz* $|w| - \mathbf{KP}(w)$ *für $w \sqsubset \xi$ unbeschränkt.*

Lemma 7.9 *Ist $\xi \in X^\omega$ zufällig, so konvergiert die Reihe* $\sum_{w\sqsubset\xi} r^{|w|-\mathbf{KP}(w)}$.

Satz 7.10 *Es sei $\xi \in X^\omega$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *ξ ist zufällig.*
2. *Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ derart, dass $\mathbf{KP}(w) \geq |w| - c$ für alle $w \sqsubset \xi$ erfüllt ist.*
3. *Es gilt* $\sum_{w\sqsubset\xi} r^{|w|-\mathbf{KP}(w)} < \infty$.

Kolmogorov-Komplexität unendlicher Wörter

$$\begin{aligned} \xi[0..n] &:= \text{Präfix der Länge } n \\ \mathbf{K}_{\mathfrak{U}}(\xi/\cdot) : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ \mathbf{K}_{\mathfrak{U}}(\xi/n) &:= \mathbf{K}_{\mathfrak{U}}(\xi[0..n]) \end{aligned}$$

oberer Anstieg:

$$\kappa(\xi) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbf{K}_{\mathfrak{U}}(\xi/n)}{n}$$

unterer Anstieg:

$$\underline{\kappa}(\xi) := \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbf{K}_{\mathfrak{U}}(\xi/n)}{n}$$