

Folgerung 6.7 Es seien $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \rightarrow X^*$ rekursive Funktionen mit der Eigenschaft $\sum_{i \in \mathbb{N}} r^{f(i)} \leq 1$. Dann gibt es eine eindeutige rekursive Funktion $h : \mathbb{N} \rightarrow X^*$ derart, dass die Menge $\{(h(i), g(i)) : i \in \mathbb{N}\}$ der Graph einer partiell-rekursiven Präfix-Funktion $\psi : \subseteq X^* \rightarrow X^*$ mit den Eigenschaften

1. $\psi(\text{dom}(\psi)) = \{g(i) : i \in \mathbb{N}\}$ und
2. $\forall i(i \in \mathbb{N} \rightarrow |h(i)| = f(i) \wedge \psi(h(i)) = g(i))$ ist.

6.2 Präfix-Komplexität

Definition 6.3 Es sei φ eine universelle Präfix-Funktion. Die Funktion $\mathbf{KP} := K_\varphi$ nennen wir *Präfix-Komplexität*.

$$\mathbf{KP}(w) := \min \{|\pi| : \varphi(\pi) = w\}$$

Lemma 6.11 Es gelten

1. $\mathbf{KP}(w) \leq |w| + 2 \cdot \log_r |w| + \mathcal{O}(1)$,
2. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\max \{\mathbf{KP}(w) : |w| = n\} \leq n + \mathbf{KP}(\text{string}_r(n)) + \mathcal{O}(1)$,
3. $\sum_{w \in X^*} r^{-\mathbf{KP}(w)} \leq 1$, und
4. die Zahl $\sum_{w \in X^*} r^{-\mathbf{KP}(w)}$ ist links berechenbar.

Satz 6.12 Die Funktion $\mathbf{KP} : X^* \rightarrow \mathbb{N}$ ist das Minimum bezüglich „ $\preceq$ “ in der Klasse aller von oben approximierbaren Funktionen $f : X^* \rightarrow \mathbb{N}$, die der Bedingung $\sum_{w \in X^*} r^{-f(w)} < \infty$ genügen.

Satz 6.8 Es gibt eine rekursive Funktion $h : \mathbb{N} \times X^* \rightarrow \mathbb{N}$, die im ersten Argument monoton nicht wachsend ist, derart, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t, w) = \mathbf{KP}(w) .$$

Satz 6.9 Die Funktion $\mathbf{KP} : X^* \rightarrow \mathbb{N}$ stimmt mit keiner partiell-rekursiven Funktion $\psi : X^* \rightarrow \mathbb{N}$ mit unendlichem Definitionsbereich $\text{dom}(\psi)$ auf $\text{dom}(\psi)$ überein.

Folgerung 6.10 Es sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine rekursive Funktion mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$. Dann ist

$$A := \{w : \mathbf{KP}(w) \leq f(|w|)\}$$

rekursiv aufzählbar, während das Komplement $X^* \setminus A$ keine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge enthält.

Folgerung 6.13 1. Zu jedem $c > 0$ gibt es unendlich viele $w \in X^*$ derart, dass $\mathbf{KP}(w) > |w| + \log_r |w| + \log_r \log_r |w| + c$.

2. Es gibt ein $c > 0$ mit $\mathbf{KP}(w) \leq |w| + \log_r |w| + 2 \cdot \log_r \log_r |w| + c$.

6.3 Berechenbare endliche Maße auf X^*

Definition 6.4 Wir nennen eine Funktion $\mu : X^* \rightarrow [0, \infty)$ ein *endliches Maß* auf X^* , falls $\mu(X^*) = \sum_{w \in X^*} \mu(w) < \infty$.

Definition 6.5 Es seien μ, ν endliche Maße. μ *dominiert* ν , falls es ein $c > 0$ mit $\forall w(\mu(w) \geq c \cdot \nu(w))$ gibt.

Satz 6.14 In der Menge $\mathcal{M}_1$ aller links berechenbaren endlichen Maße μ mit $\mu(X^*) \leq 1$ gibt es ein Maß $\mathbf{m}$ welches alle $\mu \in \mathcal{M}_1$ dominiert.

Lemma 6.15 Die Menge $\mathcal{M}_1$ ist numerierbar, d.h. es gibt eine aufzählbare Teilmenge $K \subseteq X^* \times X^* \times (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ derart, dass für jedes $\mu \in \mathcal{M}_1$ ein Programm $\pi_\mu \in X^*$ existiert, für welches

$$\mu(w) = \sup \{q : (\pi_\mu, w, q) \in K\} \text{ gilt.}$$

Lemma 6.16 Die Funktion $\mu_{\mathbf{KP}} : X^* \rightarrow [0, 1]$ mit $\mu_{\mathbf{KP}}(w) := |X|^{-\mathbf{KP}(w)}$ gehört zu $\mathcal{M}_1$ und dominiert alle $\mu \in \mathcal{M}_1$.

Folgerung 6.17 $\mathbf{KP}(w) = -\log_r \mathbf{m}(w) + \mathcal{O}(1)$

Es sei wieder $\mathbf{KP} := K_{\varphi^{(2)}}$.

Folgerung 6.19 Es gelten

1. $\mathbf{KP}(w) \leq \mathbf{KP}(w, v) + \mathcal{O}(1)$ und $\mathbf{KP}(v) \leq \mathbf{KP}(w, v) + \mathcal{O}(1)$,
2. $|\mathbf{KP}(w, v) - \mathbf{KP}(v, w)| = \mathcal{O}(1)$
3. Ist $\psi : X^* \rightarrow X^*$ partiell-rekursiv, so ist $\mathbf{KP}(w, \psi(w)) \leq \mathbf{KP}(w) + \mathcal{O}(1)$ für $v \in \text{dom}(\psi)$.
4. $\mathbf{KP}(w, \text{string}_r(\mathbf{KP}(w))) = \mathbf{KP}(w) + \mathcal{O}(1)$

Lemma 6.20 $\mathbf{KP}(w, v) \leq \mathbf{KP}(w) + \mathbf{KP}(v) + \mathcal{O}(1)$

6.4 Verbundkomplexität und bedingte Komplexität

Definition 6.6 $\phi : X^* \times \{0, 1\} \rightarrow X^*$ heißt partiell-rekursive Präfix-Funktion : $\Longleftrightarrow$

1. ϕ ist partiell-rekursive Funktion, und
2. $\text{dom}(\phi) = W \times \{0, 1\}$, wobei $W \subseteq X^*$ präfix-frei ist.

Satz 6.18 Es gibt eine optimale partiell-rekursive Präfix-Funktion $\varphi^{(2)} : X^* \times \{0, 1\} \rightarrow X^*$ derart, dass $K_{\varphi^{(2)}}(w, v) \leq K_\phi(w, v) + c_\phi$ für alle partiell-rekursiven Präfix-Funktionen ϕ und alle $w, v \in X^*$ gilt.

Definition 6.7 $\phi : X^* \times X^* \rightarrow X^*$ heißt partiell-rekursive Präfix-Funktion : $\Longleftrightarrow$

1. ϕ ist partiell-rekursive Funktion, und
2. $\forall \pi, \pi', v((\pi, v), (\pi', v) \in \text{dom}(\phi) \wedge \pi \sqsubseteq \pi' \rightarrow \pi = \pi')$

Satz 6.21 Es gibt eine optimale partiell-rekursive Funktion $\varphi^b : X^* \times X^* \rightarrow X^*$ derart, dass

$$K_{\varphi^b}(w/v) \leq K_\phi(w/v) + c_\phi$$

für alle partiell-rekursiven Präfix-Funktionen ϕ und alle $w, v \in X^*$ gilt.

Es sei wieder $\mathbf{KP} := K_{\varphi^b}$.

Folgerung 6.22 Ist $\psi : \subseteq X^* \times X^* \rightarrow X^*$ partiell-rekursiv, so gilt $\mathbf{KP}(\psi(w, v)/v) \leq \mathbf{KP}(w/v) + \mathcal{O}(1)$ für alle Paare $(w, v) \in \text{dom}(\psi)$.

Notation: $\langle w, v \rangle := \text{string}_r(|w|) \cdot w \cdot v$ und
 $\langle w, n \rangle := \text{string}_r(|w|) \cdot w \cdot \text{string}_r(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 6.23 1. $\mathbf{KP}(w, v) \leq \mathbf{KP}(v) + \mathbf{KP}(w/\langle v, \mathbf{KP}(v) \rangle) + \mathcal{O}(1)$

2. $\mathbf{KP}(w, v) \leq \mathbf{KP}(v) + \mathbf{KP}(w/v) + \mathcal{O}(1)$

Satz 6.24 $\mathbf{KP}(w, v) = \mathbf{KP}(v) + \mathbf{KP}(w/\langle v, \mathbf{KP}(v) \rangle) + \mathcal{O}(1)$