5 Verbundkomplexität und bedingte Komplexität

Definition 5.1 Es sei $\phi : X^* \times \{0,1\} \to X^*$ eine partiell-rekursive Funktion.
K_ϕ heißt *Verbundkomplexität* $:\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} K_\phi \quad &: \quad X^* \times X^* \to \mathbb{N}\text{ , wobei} \\ K_\phi(w,v) \quad &:= \quad \inf\{|\pi| : \pi \in X^* \wedge \phi(\pi,0) = w \wedge \phi(\pi,1) = v\}\ . \end{aligned}$$

Satz 5.1 *Es gibt eine optimale partiell-rekursive Funktion* $\mathfrak{U}^{(2)} : X^* \times \{0,1\} \to X^*$ *derart, dass* $K_{\mathfrak{U}^{(2)}}(w,v) \le K_\phi(w,v) + c_\phi$ *für alle* $w,v \in X^*$ *gilt.*

Es sei wieder $\mathbf{K} := K_{\mathfrak{U}^{(2)}}$.

Folgerung 5.2 *Es gelten*

1. $\mathbf{K}(w) \le \mathbf{K}(w,v) + \mathcal{O}(1)$ *und* $\mathbf{K}(v) \le \mathbf{K}(w,v) + \mathcal{O}(1)$,
2. $|\mathbf{K}(w,v) - \mathbf{K}(v,w)| = \mathcal{O}(1)$
3. *Ist* $\psi :\subseteq X^* \to X^*$ *partiell-rekursiv, so ist* $\mathbf{K}(w,\psi(w)) \le \mathbf{K}(w) + \mathcal{O}(1)$ *für* $v \in dom\,(\psi)$.

Lemma 5.3
$\mathbf{K}(w,v) \le \mathbf{K}(w) + \mathbf{K}(v) + 2 \cdot \min\left\{\log_r \mathbf{K}(w), \log_r \mathbf{K}(v)\right\} + \mathcal{O}(1)$

Satz 5.4 *Es sei* $c \in \mathbb{N}$. *Dann gibt es unendlich viele Paare* w,v *derart, dass* $\mathbf{K}(w,v) > \mathbf{K}(w) + \mathbf{K}(v) + c$.

5.1 Bedingte Komplexität

Definition 5.2 Es sei $\phi : X^* \times X^* \to X^*$ eine partiell-rekursive Funktion.
K_ϕ heißt *bedingte Kolmogorov Komplexität* $:\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} K_\phi \quad &: \quad X^* \times X^* \to \mathbb{N}\text{ , wobei} \\ K_\phi(w/v) \quad &:= \quad \inf\{|\pi| : \pi \in X^* \wedge \phi(\pi,v) = w\}\ . \end{aligned}$$

Spezialfall: $K_\phi(w) := K_\phi(w/e)$.

Satz 5.5 *Es gibt eine optimale partiell-rekursive Funktion* $\mathfrak{U}^b : X^* \times X^* \to X^*$ *derart, dass* $K_{\mathfrak{U}^b}(w/v) \le K_\phi(w/v) + c_\phi$ *für alle* $w,v \in X^*$ *gilt.*

Eigenschaften der Bedingten Komplexität

Es sei wieder $\mathbf{K} := K_{\mathfrak{U}^b}$.

Folgerung 5.6

1. $\mathbf{K}(w/v) \le |w| + \mathcal{O}(1)$
2. *Ist* $\psi :\subseteq X^* \times X^* \to X^*$ *partiell-rekursiv, so gilt* $\mathbf{K}(\psi(w,v)/v) \le \mathbf{K}(w/v) + \mathcal{O}(1)$ *für alle Paare* $(w,v) \in dom\,(\psi)$.
3. *Es gibt ein* $c > 0$ *derart, dass für* $v \in X^*$ *die Beziehung* $c \cdot r^n \le |\{w : \mathbf{K}(w,v) \le n\}| < \frac{r^{n+1}}{r-1}$ *gilt.*
4. $\dfrac{|\{w : |w| = n \ \wedge\ \mathbf{K}(w,v) \le n - c\}|}{r^n} < \dfrac{r}{r-1} \cdot r^{-c}$ *für* $v \in X^*$.
5. *Es sei* $V \subseteq X^* \times X^* \times \mathbb{N}$ *rekursiv aufzählbar und genüge der Bedingung* $\forall n \forall v (n \in \mathbb{N} \wedge v \in X^* \to \left|\{w : (w,v,n) \in V\}\right| \le r^n)$.
Dann gilt $\mathbf{K}(w/v) \le m + c$ *falls* $(w,,v,m) \in V$.

Satz 5.7 ([LV Thm. 2.6/2.7, Ca Thm. 5.1])

1. *Für kein* $v \in X^*$ *stimmt die Funktion* $\mathbf{K}(\cdot/v) : X^* \to \mathbb{N}$ *mit einer partiell-rekursiven Funktion* $\psi : X^* \to \mathbb{N}$ *mit unendlichem Definitionsbereich dom* (ψ) *auf dom* (ψ) *überein.*
2. *Es gibt eine rekursive Funktion* $h : \mathbb{N} \times X^* \times X^* \to \mathbb{N}$ *, die im ersten Argument monoton nicht wachsend ist, derart, daß*

$$\lim_{t \to \infty} h(t, w, v) = \mathbf{K}(w/v).$$

5.2 Beziehungen zwischen Verbund- und bedingter Komplexität

Lemma 5.8 *Es gelten die folgenden Ungleichungen*

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(w, v) &\leq \mathbf{K}(v) + \mathbf{K}(w/v) + 2 \cdot \log_r \mathbf{K}(v) + \mathcal{O}(1), \\ \mathbf{K}(w, v) &\leq \mathbf{K}(v) + \mathbf{K}(w/v) + 2 \cdot \log_r \mathbf{K}(w/v) + \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

und für unendlich viele Paare $w, v \in X^*$ *gilt die Ungleichung*

$$\mathbf{K}(w, v) > \mathbf{K}(v) + \mathbf{K}(w/v) + \mathcal{O}(1).$$

Satz 5.9 *Es sei* $\varepsilon > 0$. *Dann gilt*

$$\mathbf{K}(v) + \mathbf{K}(w/v) \leq \mathbf{K}(w, v) + (3 + \varepsilon) \cdot \log_r \mathbf{K}(w, v) + \mathcal{O}(1)$$

für $w, v \in X^*$.