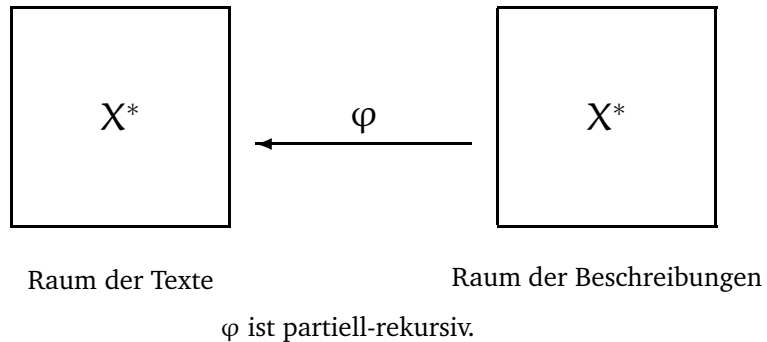


4 Kolmogorov-Komplexität von Wörtern

Text $w \in X^*$ Beschreibung (oder Programm) $\pi \in X^*$ 

Ludwig Staiger

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Satz 4.1 ([IV Thm. 2.1, Ca Thm. 2.9])

Es gibt optimale partiell-rekursive Funktionen $\mathcal{U} : X^* \rightarrow X^*$.

Folgerung 4.2 Sind $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ optimale partiell-rekursive Funktionen, so gibt es eine Konstante c mit

$$|K_{\mathcal{U}}(w) - K_{\mathcal{U}'}(w)| \leq c.$$

Wir setzen $K := K_{\mathcal{U}}$

Satz 4.3 ([IV Thm. 2.7, Ca Thm. 5.1]) Es gibt eine rekursive Funktion $h : \mathbb{N} \times X^* \rightarrow \mathbb{N}$, die im ersten Argument monoton nicht wachsend ist, derart, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t, w) = K(w).$$

Ludwig Staiger

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Definition 4.1 Es sei $\varphi : X^* \rightarrow X^*$ eine partielle berechenbare (partiell-rekursive) Funktion.

K_{φ} heißt *Kolmogorov-Komplexität* bezüglich $\varphi : \Longleftrightarrow$

$$K_{\varphi} : X^* \rightarrow \mathbb{N}, \text{ wobei}$$

$$K_{\varphi}(w) := \inf \{ |\pi| : \pi \in X^* \wedge \varphi(\pi) = w \}.$$

Definition 4.2 Eine partiell-rekursive Funktion $\mathcal{U} : X^* \rightarrow X^*$ heißt *optimal* : $\Longleftrightarrow$

Für jede partiell-rekursive Funktion $\varphi : X^* \rightarrow X^*$ existiert eine Konstante $c_{\varphi} \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\forall w (w \in X^* \rightarrow K_{\mathcal{U}}(w) \leq K_{\varphi}(w) + c_{\varphi}).$$

Ludwig Staiger

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Satz 4.4 ([IV Thm. 2.6, Ca Thm. 5.1]) Die Funktion $K : X^* \rightarrow \mathbb{N}$ stimmt mit keiner partiell-rekursiven Funktion $\psi : X^* \rightarrow \mathbb{N}$ mit unendlichem Definitionsbereich $\text{dom}(\psi)$ auf $\text{dom}(\psi)$ überein.

Folgerung 4.5 Es sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine rekursive Funktion mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$. Dann ist

$$A := \{w : K(w) \leq f(|w|)\}$$

rekursiv aufzählbar, während das Komplement $X^* \setminus A$ keine unendliche rekursiv aufzählbare Teilmenge enthält.

Ludwig Staiger

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Schreibweise: $\mathbf{K}'(n) := \mathbf{K}(\text{string}(n))$

Folgerung 4.6

1. $\exists c : \forall n : |\mathbf{K}'(n+1) - \mathbf{K}'(n)| \leq c$
2. $\exists c : \forall w : |\mathbf{K}(wx) - \mathbf{K}(w)| \leq c$

Folgerung 4.7

1. $\exists c : \forall n : \mathbf{K}'(n) \leq \log_r n + c$
2. Die Funktion $\kappa(n) := \min\{\mathbf{K}'(i) : i \geq n\}$ ist unbeschränkt.

Satz 4.8 ([LV Thm. 2.5]) Es sei $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige auf ihrem Definitionsbereich $\text{dom}(\psi)$ monoton nicht fallende unbeschränkte partiell-rekursive Funktion. Dann gibt es für die Funktion $\kappa : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ aus Folgerung 4.7.2 ein $m_\psi \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\forall n (n \in \text{dom}(\psi) \wedge n \geq m_\psi \rightarrow \kappa(n) < \psi(n)) .$$

Satz 4.9 Die Funktion $\mathbf{K} : X^* \rightarrow \mathbb{N}$ ist das Minimum bezüglich „ $\preceq$ “ in der Klasse aller von oben approximierbaren Funktionen $h : X^* \rightarrow \mathbb{N}$, die der Bedingung $|\{w : h(w) = n\}| \leq r^{n+O(1)}$ genügen.

Einfache Eigenschaften von $\mathbf{K}$

Folgerung 4.10 1. Ist $\varphi : X^* \rightarrow X^*$ partiell-rekursiv, so gilt

$$\mathbf{K}(\varphi(w)) \leq \mathbf{K}(w) + O(1) \text{ für } w \in \text{dom}(\varphi).$$

2. Es gibt ein $c > 0$ derart, dass $c \cdot r^n \leq |\{w : \mathbf{K}(w) \leq n\}| < \frac{r^{n+1}}{r-1}$.

$$3. \frac{|\{w : |w| = n \wedge \mathbf{K}(w) \leq n - c\}|}{r^n} < \frac{r}{r-1} \cdot r^{-c}$$

4. Es sei $V \subseteq X^* \times \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar und genüge der Bedingung

$$\forall n (n \in \mathbb{N} \rightarrow |\{v : (v, n) \in V\}| \leq r^n).$$

Dann gilt $\mathbf{K}(w) \leq m + c$ falls $(w, m) \in V$.