Zur Topologie der regulären Mengen

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors des Wissenschaftszweiges an der Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät des Wissenschaftlichen Rates der Friedrich - Schiller - Universität Jena

Vorgelegt
von

Ludwig Steiger
geboren am 26. 2. 1948 in Jena
Tag der Verleihung des Doktorgrades:

Inhalt

Einleitung

Im Jahre 1960 wurden von BÜCHI /Bü/ zum ersten Male Folgenmengen mit Hilfe von Automaten dargestellt. Gleichzeitig gab BÜCHI eine Charakterisierung dieser durch endliche Automaten darstellbaren Folgenmengen mit Hilfe von Wortmengen. MÜLLER (1963) und McNAUGHTON (1966) wiesen nach, daß die bezüglich des Büchischen Akzeptierungsbegriffes durch nichtdeterministische Automaten darstellbaren Mengen mit einem von MÜLLER /Mü/ angegebenen Begriffe durch deterministische Automaten akzeptierbar sind. Seit dieser Zeit begann die Suche nach natürlichen Unterklassen der durch die Arbeiten /Bü/ und /MN/ abgegrenzten Klasse der regulären Folgenmengen. So wurden in den Arbeiten von HARTMANN/STEARNS, LANDWEBER, TRACHTENBROT, JOHNSON, HOSSLEY, CHOUEKA und STAIGER/WAGNER (s. /HS/,/La/ /TB/,/Jo/,Ho/,/Ch/ und/SW 1/) Abschwächungen des MÜLLERschen Akzeptierungsbegriffes untersucht. Gleichzeitig erfolgten besonders in den Arbeiten /La/ und/SW 1/ topologische Einordnungen der von den verschiedenen Akzeptierungsbegriffen akzeptierten Mengen. Es wurde die Produkttopologie in X^{ω} betrachtet, für die die regulären Folgenmengen gleichzeitig $F_{\sigma\delta}$ - und $G_{\delta\sigma}$ -Mengen sind. In der Arbeit /SW 1/ konnten für sämtliche

topologischen Unterklassen (das sind: G-, F-, $F_\sigma \wedge G_\delta$-, F_σ - und G_δ-Mengen) regulärer Folgenmengen Akzeptierungsbegriffe und auch automatenfreie Darstellungen auf der Grundlage der regulären Wortmenge gegeben werden.
Bei der Darstellung von Folgenmengen durch Wortmengen spielen neben der von BÜCHI eingeführten ω-Operation der von DAVIS (s./Da/) untersuchte $\mathcal{G}_\delta$-Operator eine besondere Rolle (vgl. dazu auch die Arbeiten /Li/ und /SW 2/). In der vorliegenden Arbeit werden auf Grund der Bedeutung des $\mathcal{G}_\delta$-Operators im ersten Paragraphen seine Eigenschaften und seine Beziehung zur ω-Operation untersucht. Dabei zeigen wir, daß der $\mathcal{G}_\delta$-Operator eine im Raum X^* geeignet gewählte Topologie weitgehend in den Folgenraum X^ω überträgt. Einige weitere dieser übertragenen Eigenschaften werden wir in § 6 darstellen.
Im zweiten Abschnitt der Arbeit charakterisieren wir einige topologische Typen regulärer Wortmengen durch Eigenschaften des akzeptierenden Automaten bzw. automatenfrei mit Hilfe einiger in § 1 eingeführter Begriffe.
Die folgenden Paragraphen drei und vier sind den Beziehungen zwischen den topologischen Typen regulärer Folgenmengen und geeignet gewählten Akzeptierungsbegriffen gewidmet. Dabei stützen wir uns im Unterschied zu den Arbeiten /SW 1/ und /Wa 2/ besonders auf die Eigenschaften des $\mathcal{G}_\delta$-Operators, und nutzen aus, daß er sowohl die Regularität als auch gewisse topologische Eigenschaften von Wort- auf Folgenmengen überträgt.
Obwohl in den Abschnitten 3, 4 und 5 der vorliegenden Arbeit gegenüber /Wa 2/ keine neuen Ergebnisse erzielt wurden, machen doch die unterschiedlichen Beweismethoden deutlich, daß die über die Resultate der Arbeit des Autors mit Herrn WAGNER (/SW 1/) hinaus angeführten Resultate unabhängig voneinander erzielt wurden. Das wird insbesondere dadurch deutlich, daß hier die Beziehungen zwischen den durch partielle und volldefinierte Automaten einerseits sowie zwischen den durch deterministische und nichtdeterministische Automaten akzeptierten Folgenmengen andererseits jeweils Gegenstand nur einer Aussage sind.

Der Paragraph 5 der Arbeit behandelt die Abgeschlossenheitseigenschaften und Inklusionsbeziehungen zwischen den einzelnen Klassen regulärer Folgenmengen (vgl. auch /Wa 2/).
Der sechste und letzte Abschnitt ist der Beziehung zwischen Maß und Kategorie für reguläre Mengen gewidmet. Im Gegensatz zu Kapitel 22 der Monographie von Oxtoby /Ox/, in dem die Topologie dem Maß angepaßt wird, gehen wir hier einen anderen Weg. Wir zeigen für eine geeignete Familie von Folgenmengen (vgl. /SW 2/), daß für diese Maß und Kategorie verträglich sind. Weiter sollen die angegebenen Beispiele illustrieren, daß schon für "geringfügige" Erweiterungen der angegebenen Familie Maß und Kategorie nicht mehr verträglich sind.
Die Untersuchungen des Abschnittes 6 haben ihren Ursprung und gleichzeitig ihre Anwendung als Grundlage für die Klassifizierung der regulär-nichtzufälligen Folgen mit Hilfe stetiger Strategien (s./Ls/), wie sie von LINDNER erstmals 1974 (s./Ld/) in Anlehnung an die von SCHNORR (/Sc/) definierten total-rekursiven Sequentialtests vorgeschlagen wurde.

Den Herren Dipl.-math. Egbert CREUTZBURG, Prof.Dr. sc.Rolf LINDNER, Dr. Klaus WAGNER und Dr. sc. Gerd WECHSUNG möchte ich für viele interessante Diskussionen und Hinweise zum Thema danken.

Bezeichnungen und Vereinbarungen

Mit N bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen. Für ein endliches Alphabet X seien X^* die freie Worthalbgruppe mit dem Einselement e (leeres Wort) über X sowie X^ω die Menge aller unendlichen Folgen (des Ordnungstyps ω) über X. Die Aneinanderreihung von $w \in X^*$ und $b \in X^* \cup X^\omega$ bezeichnen wir mit $w \cdot b$. Daraus ergibt sich in natürlicher Weise ein Produkt $W \cdot B$ von Mengen $W \subseteq X^*$ und $B \subseteq X^* \cup X^\omega$. Weiter seien W^* die von $W \subseteq X^*$ erzeugte Unterhalbgruppe, sowie V^ω die Menge aller Folgen aus X^ω, die sich als unendliche Produkte von Wörtern aus V darstellen lassen. Wir werden an Stelle von $\{w\} \cdot B$, $\{w\}^*$ und $\{w\}^\omega$ künftig kurz $w \cdot B$, w^* bzw. w^ω schreiben.

Wir nennen ferner $w \in X^*$ ein Anfangswort von $b \in X^* \cup X^\omega$, wenn es ein b' mit $w \cdot b' = b$ gibt, und schreiben $w \sqsubseteq b$. Ist außerdem $w \neq b$, so schreiben wir $w \sqsubset b$. Weiter setzen wir $A(b) =_{df} \{ w : w \in X^* \wedge w \sqsubseteq b \}$ und $A(B) =_{df} \bigcup_{b \in B} A(b)$.

Wortmengen W, die bezüglich " $\sqsubseteq$ " total ungeordnet sind, d.h. für die $\forall w \forall v (w, v \in W \rightarrow \sim w \sqsubset v)$ gilt, werden wir kurz als t.u. Wortmengen (t.u. Mengen) bezeichnen.

Schließlich sei $B/w =_{df} \{ b : w \cdot b \in B \}$ der von w erzeugte Zustand der Menge B.

Unter einem Automaten wollen wir in dieser Arbeit stets einen endlichen initialen Automaten ohne Ausgabe, bei dem jeder Zustand aus dem Anfangszustand erreichbar ist. Sofern nicht anders vereinbart, werden wir weiter die betrachteten Automaten als voll definiert und deterministisch voraussetzen.

Für die Mengen der Borelschen Hierarchie verwenden wir die gebräuchlichen Bezeichnungen:

G - Mengen für offene Mengen

F - Mengen für abgeschlossene Mengen

G_δ - Mengen für abzählbare Durchschnitte offener Mengen

F_σ - Mengen für abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen

$G_{\delta\sigma}$ - Mengen für abzählbare Vereinigungen von G_δ - Mengen und

$F_{\sigma\delta}$ - Mengen für abzählbare Durchschnitte von F_σ - Mengen.

Der Kürze halber schreiben wir für Mengen, die sowohl F_σ - Menge als auch G_δ - Menge sind, $F_\sigma \wedge G_\delta$ - Menge und für Mengen, die Durchschnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen Menge sind, $G \Delta F$ - Menge.
Zuweilen werden wir auch die Klasse aller G -, F -, $G \Delta F$ -, $F_\sigma \wedge G_\delta$ -, G_δ - bzw F_σ - Teilmengen eines topologischen Raumes mit den entsprechenden Buchstaben bezeichnen.

§ 1 Der $\mathcal{G}_\delta$ - Operator

Wir betrachten im folgenden X^ω stets als den unendlichen Produktraum des diskreten topologischen Raumes X. Damit haben wir in X^ω eine Topologie eingeführt. In dieser Topologie ist X^ω homöomorph dem Cantorschen Diskontinuum (vgl. /Ox/, /TB/), d.h. ein kompakter metrisierbarer topologischer Raum. Bekanntlich bildet $(w\cdot X^\omega)_{w\in X^*}$ eine Basis der Produkttopologie in X^ω, und somit lassen sich die offenen Teilmengen von X^ω in der Form $W\cdot X^\omega$ mit $W \subseteq X^*$ darstellen.
Analog läßt sich in X^* eine Topologie einführen, indem wir $(w\cdot X^*)_{w\in X^*}$ als ihre Basis wählen. Dann haben die offenen Teilmengen von X^* die Gestalt $W\cdot X^*$. Diese Topologie ist die durch die Halbordnung " $\sqsubseteq$ " in X^* induzierte Rechtstopologie, und X^* ist in dieser Topologie ein T_0-Raum (s. /Va/). Der Abschluß einer Teilmenge W von X^* in der Rechtstopologie ist die Menge A(W), d.h. W ist dann und nur dann abgeschlossen, wenn aus $w \in W$ und $v \sqsubseteq w$ stets $v \in W$ folgt.
Wir wollen nun den Abschluß C(P) einer Menge $P \subseteq X^\omega$ sowie die abgeschlossenen Mengen im Raume X^ω charakterisieren.
<u>Lemma 1.1.</u> Es gilt $C(P) = X^\omega \setminus \overline{A(P)}\cdot X^\omega$ für $P \subseteq X^\omega$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Inklusion " $\subseteq$ ". Ist $p \in P$, so gilt $\overline{A(P)} \cap A(p) = \emptyset$; somit haben wir $p \notin \overline{A(P)}\cdot X^\omega$.
Der Beweis der anderen Inklusion folgt aus der Tatsache, daß $\overline{A(P)}\cdot X^\omega$ die größte in $\overline{P}$ enthaltene offene Menge ist. Wäre nämlich $v\cdot X^\omega \subseteq \overline{P}$ für ein $v \in A(P)$, so gäbe es ein p aus P, welches gleichzeitig in $\overline{P}$ läge. ∎

<u>Corollar 1.2.</u> Eine Teilmenge P von X^ω ist genau dann abgeschlossen, wenn aus $A(p) \subseteq A(P)$ stets $p \in P$ folgt.

Beweis. Ist P abgeschlossen, so ist $\overline{P}$ offen, und zufolge Lemma 1.1. gilt $\overline{P} = \overline{A(P)} \cdot X^\omega$. Damit erhalten wir $p \notin \overline{P}$ aus $A(p) \subseteq A(P)$. Folgt umgekehrt $p \in P$ aus $A(p) \subseteq A(P)$, so haben wir $\overline{P} = \overline{A(P)} \cdot X^\omega$. Also ist P abgeschlossen. ■
Aus den Beweisen vom Lemma 1.1. und Corollar 1.2. erhält man leicht

<u>Corollar 1.3.</u> (1) $\quad C(P) = \{ p: A(p) \subseteq A(P) \}$
(2) $\quad A(C(P)) = A(P)$

Auf Grund der ähnlichen Darstellungen der offenen Teilmengen von X^* bzw. X^ω und auf Grund der in Lemma 1.1. beschriebenen Beziehung zwischen den Operatoren A und C können wir annehmen, daß sich die topologischen Eigenschaften gewisser Teilmengen von X^ω durch Eigenschaften von Wortmengen beschreiben lassen. Diesen Zweck erfüllt der in /Da/ definierte $\mathcal{G}_\delta$ - Operator; die Bestätigung dieser Aussage ist ein Ziel der vorliegenden Arbeit.

<u>Definition 1.4.</u> $\mathcal{G}_\delta(W) =_{df} \{ q: A(q) \cap W \text{ unendlich} \}$

Wir geben nun einige Eigenschaften des $\mathcal{G}_\delta$ - Operators an.

<u>Satz 1.5.</u> (Davis) Eine Teilmenge Q von X^ω ist genau dann G_δ - Menge, wenn es ein $W \subseteq X^*$ mit $Q = \mathcal{G}_\delta(W)$ gibt.

<u>(1.6.)</u> (1) $\quad \mathcal{G}_\delta(W \cup V) = \mathcal{G}_\delta(W) \cup \mathcal{G}_\delta(V)$
(2) $\quad \mathcal{G}_\delta(W \cdot X^*) = W \cdot X^\omega$

Eigenschaft (1.6.)(2) zeigt uns, daß der $\mathcal{G}_\delta$ - Operator offene Mengen in offene überführt. Da der $\mathcal{G}_\delta$ - Operator als Bilder nur Teilmengen von X^ω hat, die höchstens G_δ -Mengen sind, suchen wir nun nach hinreichenden Bedingungen an Wortmengen (analog zu (1.6.)(2)) dafür, daß das $\mathcal{G}_\delta$ - Bild eine abgeschlossene bzw. $F_\sigma \wedge G_\delta$ - Menge ist. Zu diesem Zwecke führen wir den folgenden Begriff ein.

<u>Definition 1.7.</u> Die Menge $W \subseteq X^*$ heißt (σ,δ) - Menge $\Leftrightarrow_{df}$ Für jedes $q \in X^\omega$ ist eine der Mengen $A(q) \cap \overline{W}$ oder $A(q) \cap W$ endlich.

Die angegebene Bedingung ist offenbar gleichwertig mit der Beziehung $\overline{\mathcal{G}_\delta(\overline{W})} = \mathcal{G}_\delta(W)$.
Beispiele für (σ,δ) - Mengen sind die offenen und damit auch deren Komplemente die abgeschlossenen Teilmengen von X^*. Mithin überführt der $\mathcal{G}_\delta$- Operator abgeschlossene Mengen in abgeschlossene. Darüber hinaus erhalten wir mit Corollar 1.3.(1) noch die Beziehung $C(P) = \mathcal{G}_\delta(A(P))$.
Wir möchten an dieser Stelle noch bemerken, daß der in /St 1/ definierte ls - Operator gleich der Hintereinanderausführung $\mathcal{G}_\delta \circ A$ (eingeschränkt auf den Definitionsbereich $\mathfrak{P}X^*$) ist, d.h. es gilt $\mathrm{ls}\, W = \mathcal{G}_\delta(A(W))$ für $W \subseteq X^*$.
Der folgende Satz liefert uns nun den Zusammenhang zwischen (σ,δ) - Mengen und $F_\sigma \wedge G_\delta$ - Mengen.

Satz 1.8. Eine Menge $Q \subseteq X^\omega$ ist genau dann $F_\sigma \wedge G_\delta$ - Menge, wenn es eine (σ,δ) - Menge $W \subseteq X^*$ mit $Q = \mathcal{G}_\delta(W)$ gibt.

Beweis. Ist W eine (σ,δ) - Menge, so gilt $\mathcal{G}_\delta(W) = X^\omega \setminus \mathcal{G}_\delta(\overline{W})$, und $\mathcal{G}_\delta(W)$ ist daher auch F_σ - Menge.
Es sei nun Q eine $F_\sigma \wedge G_\delta$ - Menge. Dann gibt es $V, V' \subseteq X^*$ mit $\mathcal{G}_\delta(V) = \overline{Q}$ und $\mathcal{G}_\delta(V') = Q$. Mithin haben wir $\mathcal{G}_\delta(V \cap V') \subseteq$ $\subseteq Q \cap \overline{Q} = \emptyset$, und wegen (1.6.)(1) können wir $V' \cap V = \emptyset$ annehmen. Weiter sei o.B.d.A. $e \in V'$. Wir setzen
$W =_{df} \{w : \exists v'(v' \in V' \wedge v' \sqsubseteq w \wedge \forall v(v' \sqsubseteq v \sqsubseteq w \rightarrow v \notin V))\}$.
Offenbar gelten $V' \subseteq W$ und $V \subseteq \overline{W}$. Zeigen wir jetzt noch $\mathcal{G}_\delta(W) \cap \mathcal{G}_\delta(\overline{W}) = \emptyset$, so folgt die Behauptung mit $Q \subseteq \mathcal{G}_\delta(W)$ und $\overline{Q} \subseteq \mathcal{G}_\delta(\overline{W})$. Nehmen wir an, es sei $q \in \mathcal{G}_\delta(W) \cap \mathcal{G}_\delta(\overline{W})$. Dann gibt es Familien $(w_i)_{i\in N} \subseteq A(q) \cap W$ und $(w_i')_{i\in N} \subseteq$ $\subseteq A(q) \cap \overline{W}$ derart, daß für alle $i \in N$ die Beziehung $w_i \sqsubset w_i' \sqsubset$ $\sqsubset w_{i+1}$ gilt. Somit gibt es Familien $(v_i')_{i\in N} \subseteq V'$ und $(v_i)_{i\in N} \subseteq$ $\subseteq V$ mit $w_{i-1}' \sqsubset v_i' \sqsubseteq w_i \sqsubset v_i \sqsubseteq w_i'$. Also sind auch die Mengen $A(q) \cap V$ und $A(q) \cap V'$ unendlich, was unserer Annahme widerspricht. ∎

Weiter gilt

(1.9.) (1) Es sei W eine (σ,δ) - Teilmenge von X^*. Dann gilt für jedes $V \subseteq X^*$ die Gleichung

$$\mathcal{G}_\delta(W \cap V) = \mathcal{G}_\delta(W) \cap \mathcal{G}_\delta(V) .$$

(2) Die Menge aller $(\mathfrak{S},\delta)$ - Teilmengen von X^* bildet eine Boolesche Mengenalgebra.

Beweis. (1) Offenbar gilt die Inklusion " $\subseteq$ ". Andererseits haben wir $\mathcal{G}_\delta(V) = \mathcal{G}_\delta(W \cap V) \cup \mathcal{G}_\delta(\overline{W} \cap V)$, und mit $\mathcal{G}_\delta(\overline{W} \cap V) \subseteq \mathcal{G}_\delta(\overline{W}) = \overline{\mathcal{G}_\delta(W)}$ ergibt sich die Behauptung.

(2) Es genügt zu zeigen, daß die Vereinigung zweier $(\mathfrak{S},\delta)$ - Mengen wieder $(\mathfrak{S},\delta)$ - Menge ist. Mit (1) und (1.6)(1) haben wir

$$\begin{aligned} X^\omega \setminus \mathcal{G}_\delta(W \cup V) &= X^\omega \setminus (\mathcal{G}_\delta(W) \cup \mathcal{G}_\delta(V)) \\ &= \mathcal{G}_\delta(\overline{W}) \cap \mathcal{G}_\delta(\overline{V}) \\ &= \mathcal{G}_\delta(\overline{W} \cap \overline{V}) = \mathcal{G}_\delta(\overline{W \cup V}) \end{aligned}$$

für beliebige $(\mathfrak{S},\delta)$ - Teilmengen von X^*. ■

Zum Abschluß dieses Abschnittes untersuchen wir noch das Verhalten der Operatoren $\mathcal{G}_\delta$, ls und A bezüglich der Operationen " $\cdot$ " und " * ". Das folgende Lemma aus /St 3/ dient der Vorbereitung der späteren Aussagen.

Lemma 1.10. Es seien $W \subseteq X \cdot X^*$, $P, Q \subseteq X^\omega$, und es gelte die Beziehung (ö) $P = W \cdot P \cup Q$. Dann ist

$$W^* \cdot Q \subseteq P \subseteq W^\omega \cup W^* \cdot Q \;.$$

Beweis. Die Inklusion $W^* \cdot Q \subseteq P$ erhält man leicht aus (ö). Zum Nachweis der anderen bemerken wir vorerst, daß $P' \subseteq W^\omega$ aus $P' \subseteq W \cdot P'$ folgt. Ist nämlich $p \in P'$, so gibt es $w_1 \in W$ und $p_1 \in P'$ mit $p = w_1 \cdot p_1$. Weiter zerlegen wir $p_1 = w_2 \cdot p_2$ mit $w_2 \in W$ und $p_2 \in P'$ usf. Damit erhalten wir eine Darstellung $p = w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \in W^\omega$. Formen wir nun (ö) geeignet um, so können wir die erhaltene Aussage zum Beweis des Lemmas anwenden. Mit (ö) gilt $P \setminus W^* \cdot Q = (W \cdot P \cup Q) \setminus W^* \cdot Q = W \cdot P \setminus W^* \cdot Q \subseteq W \cdot (P \setminus W^* \cdot Q)$. Damit haben wir $P \setminus W^* \cdot Q \subseteq W^\omega$. ■

Die folgenden Aussagen sind leicht einzusehen.

(1.11.) Es seien $B, B_i \subseteq X^* \cup X^\omega$, $B \neq \emptyset$ und $W \subseteq X \cdot X^*$. Dann gelten

(1) $\quad A(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} A(B_i)$

(2) $\quad A(W \cdot B) = A(W) \cup W \cdot A(B)$

(3) $\quad A(W^*) = A(W^\omega) = W^* \cdot A(W)$

Lemma 1.12. (1) $W\cdot \mathcal{G}_\delta(V) \subseteq \mathcal{G}_\delta(W\cdot V) \subseteq \mathcal{G}_\delta(W) \cup W\cdot \mathcal{G}_\delta(V)$
(2) $\mathcal{G}_\delta(W\cdot V) = \mathcal{G}_\delta(W) \cup W\cdot \mathcal{G}_\delta(V)$, falls $e\in V$.

Beweis. (1) Die erste Inklusion ist evident. Ist nun die Menge $A(p)\cap W\cdot V$ unendlich, so ist $A(p)\cap W$ unendlich oder es gibt ein $w\in W$ derart, daß $A(p)\cap w\cdot V$ unendlich ist. Damit ist auch die zweite Inklusion gezeigt.

(2) ergibt sich mit (1.6.)(1) aus (1). ■

Für den ls - Operator erhalten wir jetzt

Corollar 1.13. Ist $V\neq\emptyset$, so gilt

$$\text{ls } W\cdot V = \text{ls } W \cup W\cdot \text{ls } V .$$

Weiter haben wir

Satz 1.14. Es ist $\mathcal{G}_\delta(W^*) = W^\omega \cup W^*\cdot \mathcal{G}_\delta(W)$.

Beweis. Wir können o.B.d.A. $e\notin W$ annehmen. Zunächst gilt offenbar $W^\omega \subseteq \mathcal{G}_\delta(W^*)$. Weiterhin haben wir $\mathcal{G}_\delta(W^*) = \mathcal{G}_\delta(W\cdot W^*)$, und mit Lemma 1.12.(2) erhalten wir daraus $\mathcal{G}_\delta(W^*) = W\cdot \mathcal{G}_\delta(W^*) \cup \mathcal{G}_\delta(W)$. Damit ist Lemma 1.10. anwendbar, und wir errechnen $\mathcal{G}_\delta(W^*) = W^\omega \cup W^*\cdot \mathcal{G}_\delta(W)$.

Auf die gleiche Weise zeigt man unter Zuhilfenahme von Corollar 1.13.

Corollar 1.15. $\text{ls } W^* = W^\omega \cup W^*\cdot \text{ls } W$

Unseren weiteren Untersuchungen wird es von Nutzen sein, das Verhalten der Operatoren $\mathcal{G}_\delta$, ls und A gegenüber t.u. Wortmengen zu betrachten.

Lemma 1.16. Es sei W t.u. Teilmenge von X^*. Dann gelten:

(1) $\mathcal{G}_\delta(W) = \emptyset$
(2) $\text{ls } W \cap W\cdot X^* = \emptyset$
(3) $A(W)\cap W\cdot V = W$, falls $e\in V$
(4) $\mathcal{G}_\delta(W^*) = \bigcap_{n\in N} W^n\cdot X^\omega = W^\omega$

Beweis. (1) ist klar.

(2) Ist $p\in \text{ls } W$, d.h. $A(p)\subseteq A(W)$, und ist W t.u. Menge, so gibt $A(p)\cap W = \emptyset$, was unsere Behauptung beweist.

(3) Die Bedingungen $w\in A(W)$ und $w\in W\cdot V$ können nur dann für eine t.u. Menge gleichzeitig erfüllt sein, wenn $w\in W$.

(4) Die Beziehung $\mathcal{G}_\delta(W^*) \supseteq \bigcap_{n\in N} W^n\cdot X^\omega \supseteq W^\omega$ ist offensichtlich. Mit (1) und Satz 1.14. erhalten wir die Gleichheit $\mathcal{G}_\delta(W^*) = W^\omega$ für t.u. Mengen W. ■

§ 2 Reguläre Wortmengen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den topologischen Eigenschaften der regulären Teilmengen von X^*. Da die topologische Struktur von X^* sehr "arm" ist (Die Borelsche Hierarchie in X^* besteht nur aus den Klassen der offenen bzw. der abgeschlossenen Mengen (Fig. 1.11., vgl auch /Va/).), untersuchen wir insbesondere die regulären $(\mathfrak{G},\delta)$ - Mengen. Zunächst geben wir noch einige bekannte Aussagen über reguläre Wortmengen an. Dazu sei für einen Automaten $\mathfrak{A} = (X,Z,f,z_o)$ und ein $Z' \subseteq Z$ die Menge $T(\mathfrak{A},Z') =_{df} \{ w: f(z_o,w) \in Z' \}$ gesetzt.

Satz 2.1. Es sei $W \subseteq X^*$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent: (1) W ist regulär.

(2) Es gibt einen Automaten $\mathfrak{A}$ und ein Z' derart, daß $W = T(\mathfrak{A},Z')$.

(3) Die Menge W hat endliches Gewicht, d.h. W hat nur endlich viele Zustände W/w .

Satz 2.2. (1) Die Menge der regulären Teilmengen von X^* ist abgeschlossen bezüglich der folgenden Operationen: $\cup$, $\cap$, $^-$, $\cdot$, *, $A(\cdot)$ und $\cdot/v$.

(2) Ist $W \subseteq X^*$ regulär, so ist für beliebiges $v \in X^*$ die Menge $W_v =_{df} \{ w: W/w = W/v \}$ ebenfalls regulär.

Die Aussage (2) ist eine unmittelbare Folgerung eines Satzes von Nerode : Ist $\sim$ eine rechtsstabile Äquivalenzrelation über X^* von endlichem Index, so ist jede ihrer Äquivalenzklassen regulär .

Lemma 2.3. Zu jeder regulären Teilmenge W von X^* gibt es reguläre t.u. Wortmengen W_i, V_i $(1 \leq i \leq n)$ derart, daß

$$W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot V_i^* .$$

Wir geben jetzt einige bekannte Charakterisierungen der offenen und der abgeschlossenen regulären Wortmengen an.

Dazu sei $z \vdash z'$ eine Abkürzung für $\exists w(w \in X^* \wedge f(z,w) = z')$.

<u>Lemma 2.4.</u> Es sei $W \subseteq X^*$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent: (1) W ist regulär und offen.

(2) Es gibt ein reguläres $V \subseteq X^*$ mit $W = V \cdot X^*$.

(3) Für jeden Automaten $\mathfrak{A} = (X,Z,f,z_0)$ und jedes $Z' \subseteq Z$ mit $T(\mathfrak{A},Z') = W$ gilt: Aus $z \vdash z'$ und $z \in Z'$ folgt $z' \in Z'$.

<u>Lemma 2.5.</u> Es sei $W \subseteq X^*$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent: (1) W ist regulär und abgeschlossen.

(2) Es gibt ein reguläres V mit $W = A(V)$.

(3) Für jeden Automaten $\mathfrak{A} = (X,Z,f,z_0)$ und jedes $Z' \subseteq Z$ mit $T(\mathfrak{A},Z') = W$ gilt: Aus $z \vdash z'$ und $z' \in Z'$ folgt $z \in Z'$.

Der folgende Satz gibt uns eine Charakterisierung der regulären (σ,δ) - Mengen.

<u>Satz 2.6.</u> Es sei $W \subseteq X^*$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent: (1) W ist reguläre (σ,δ) - Menge.

(2) Für jeden Automaten $\mathfrak{A} = (X,Z,f,z_0)$ und jedes $Z' \subseteq Z$ mit $T(\mathfrak{A},Z') = W$ gilt: Aus $z \vdash z' \vdash z$ und $z \in Z'$ folgt $z' \in Z'$.

(3) Es gibt ein $n \in N$ und reguläre t.u. W_i sowie reguläre V_i derart, daß $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot A(V_i)$.

(4) Es gibt ein $n \in N$ und reguläre offene W_i sowie reguläre abgeschlossene V_i derart, daß
$$W = \bigcup_{i=1}^{n} (W_i \cap V_i).$$

Beweis. (1) $\rightarrow$ (2). Wir beweisen die Kontraposition. Es sei also $W = T(\mathfrak{A},Z')$, und es gelte $z \vdash z' \vdash z$ für gewisse $z \in Z'$ und $z' \notin Z'$. Dann gibt es $w, v, r \in X^*$ mit $f(z_0,r) = z$, $f(z,w) = z'$ und $f(z',v) = z$. Somit haben wir $r \circ (w \circ v)^* \subseteq W$ sowie $r \circ (w \circ v)^* \cdot w \subseteq \overline{W}$, und W ist also keine (σ,δ) - Menge.

(2) $\rightarrow$ (3). Setzen wir $W_z =_{df} \{ w: f(z_0,w) = z \wedge \wedge \forall w'(w' \sqsubset w \rightarrow f(z_0,w') \neq z)\}$ und $V_z =_{df} \{v: f(z,v) = z\}$, so gilt offenbar $W = \bigcup_{z \in Z'} W_z \cdot V_z$, wobei die W_z t.u. Mengen sind. Wegen (2) haben wir für jedes $v' \in A(V_z)$ die Beziehung $f(z,v') \in Z'$, falls $z \in Z'$. Also ist $W_z \cdot A(V_z) \subseteq W$ für $z \in Z'$. Damit ist die Implikation (2) $\rightarrow$ (3) gezeigt.

(3) $\to$ (4). Für $V_i \neq \emptyset$ ist $e \in A(V_i)$. Mit Lemma 1.16.(3) haben wir dann $W_i \cdot A(V_i) = A(W_i \cdot A(V_i)) \cap W_i \cdot X^*$, womit auch diese Richtung gezeigt ist.

(4) $\to$ (1) ist trivial, da sowohl die regulären, als auch die (σ, δ) - Teilmengen von X eine Mengenalgebra bilden.

§ 3 Reguläre Folgenmengen

Nachdem wir topologische Eigenschaften der regulären Wortmengen betrachtet haben, wenden wir uns den Eigenschaften regulärer Folgenmengen zu. Im Gegensatz zu X^* ist die Topologie in X^ω "reicher", insbesondere beschränkt sich die Borelsche Hierarchie nicht nur auf zwei Klassen.

Wie in /MN/ nennen wir eine Menge $P \subseteq X^\omega$ regulär, wenn es ein $n \in N$ und reguläre Wortmengen W_i, V_i mit

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot V_i^\omega \quad \text{gibt.}$$

Wir stellen nun einige bekannte Aussagen über reguläre Folgenmengen zusammen. Büchi zeigte (s. /Bü/), daß die Menge aller reguären Teilmengen von X^ω eine Boolesche Mengenalgebra bildet, eine Aussage, die auch aus der von Müller /Mü/ und McNaughton /MN/ nachgewiesenen Darstellbarkeit von regulären Folgenmengen durch deterministische Automaten folgt.

Weiter zeigte Trachtenbrot (s. /TB/), daß jede reguläre Folgenmenge sowohl $F_{\sigma\delta}$-, als auch $G_{\delta\sigma}$- Menge ist. Hieraus erklärt sich das Anliegen dieses Abschnittes, die regulären F -, G -, $F_\sigma \wedge G_\delta$ -, F_σ - bzw. G_δ - Mengen durch entsprechende Akzeptierungsbegriffe für Automaten, sowie durch reguläre Wortmengen darzustellen.

Vorerst sei noch bemerkt, daß im Gegensatz zu den Wortmengen (vgl. Satz 2.1.) nicht jede Folgenmenge endlichen Gewichts regulär ist. Trachtenbrot zeigte außerdem (s. /Tr/), daß es überabzählbar viele Folgenmengen endlichen Gewichts gibt.

Es gelten nur die folgendem Aussagen (s. /Tr/)

<u>Lemma 3.1.</u> (1) Jede reguläre Teilmenge P von X^ω hat enliches Gewicht, d.h. $\{P/w: w \in X^*\}$ ist endlich.

(2) Hat P endliches Gewicht, so ist $C(P)$ regulär.

(3) Ist P regulär, so ist auch P/w regulär.

Weiter haben wir

(3.2.) Hat $P \subseteq X^{\omega}$ **endliches Gewicht, so ist A(P) regulär.**

Beweis. Wegen $A(P/w) = A(P)/w$ hat $A(P)$ endliches Gewicht und ist nach Satz 2.1. regulär. ∎

Wir untersuchen jetzt, ob die Operatoren $\mathcal{G}_\delta$ und ls die Regularität von Wort- auf Folgenmengen übertragen.

Lemma 3.3. Ist $W \subseteq X^*$ regulär, so sind $\mathcal{G}_\delta(W)$ und ls W reguläre Teilmengen von X^{ω}.

Beweis. Gemäß Lemma 2.3. läßt sich W in der Form $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot V_i^*$ darstellen, wobei die W_i und V_i reguläre t.u. Teilmengen von X^* sind. Mit (1.6.) (1), den Lemmata 1.12.(2) und 1.16.(1) sowie Satz 1.14. läßt sich dann leicht $\mathcal{G}_\delta(W) = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot V_i^{\omega}$ errechnen. Die Behauptung für ls W ergibt sich unmittelbar aus der für $\mathcal{G}_\delta(W)$. ∎

Der Beweis von Lemma 3.3. hat uns gleichzeitig eine Darstellung von $\mathcal{G}_\delta(W)$ durch reguläre Wortmengen und die Operationen $\cup$, $\cdot$ und $^{\omega}$ gegeben, auf die wir noch zurückgreifen werden.

Mit Corollar 1.3.(2), der Beziehung $C(P) = \mathcal{G}_\delta(A(P)) =$ $=$ ls $A(P)$ und Lemma 1.1. erhalten wir aus der obenstehenden Aussage

Corollar 3.4.(1) Eine Menge $Q \subseteq X^{\omega}$ ist genau dann regulär und abgeschlossen, wennes ein reguläres $V \subseteq X^*$ mit $Q =$ ls V gibt.

(2) Eine Menge $P \subseteq X^{\omega}$ ist genau dann regulär und offen, wenn es ein reguläres $W \subseteq X^*$ mit $P = W \cdot X^{\omega}$ gibt.

Schließlich ist es uns noch möglich, eine Darstellung der Komplemente der im Beweis von Lemma 3.3. charakterisierten Mengen durch reguläre Wortmengen anzugeben.

Lemma 3.5. Es sei $W \subseteq X^*$ regulär. Dann gibt es ein $n \in N$ und reguläre W_i, $V_i \subseteq X^*$ derart, daß

$$X^{\omega} \setminus \mathcal{G}_\delta(W) = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot \text{ls } V_i$$

Beweis. Es ist genau dann $p \notin \mathcal{G}_\delta(W)$, wenn es ein $v \sqsubset p$ derart gibt, daß $w \notin W$ für alle w, $v \sqsubset w \sqsubset p$, gilt. Damit haben wir $X^{\omega} \setminus \mathcal{G}_\delta(W) = \bigcup_{v \in X^*} v \cdot P_v$, wobei $P_v =_{df} \{ p\colon A(p) \wedge W/v = \emptyset \}$.

Damit ist $\overline{P}_v = (W/v)\cdot X^{\omega}$. Nach Voraussetzung ist W und mithin auch W/v regulärr; also ist P_v reguär und abgeschlossen, und es gibz nur endlich viele W/v und P_v. Nach Satz 2.2.(2) sind die Mengen $W_v = \{w\colon W/w = W/v\}$ regulär. Somit gibt es eine endliche Menge $M \subseteq X^*$ derart, daß $X^{\omega} \setminus \mathcal{G}_{\delta}(W) = \bigcup_{v\in M} W_v\cdot P_v$. Die Behauptung ergibt sich jetzt mit Corollar 3.4.(1). ■

Wir gehen nun auf die Frage ein, ob sich die regulären F -, G -, $F_{\sigma}\wedge G_{\delta}$ -, F_{σ} - und G_{δ} - Mengen durch geeignete Akzeptierungsbegriffe in Automaten darstellen lassen. Weiter werden wir die einzelnen Klassen durch reguläre Wortmengen und die Operationen $\cup$, $\cdot$, $^{\omega}$ und ls , ähnlich wie es Corollar 3.4. zeigt, beschreiben.

Es sei $\mathfrak{A} = (X,Z,f,z_o)$ ein Automat. Für eine Folge $p \in X^{\omega}$ bezeichnen wir mit $E_{\mathfrak{A}}(p) =_{df} \{f(z_o,w)\colon w \sqsubset p\}$ die Menge aller bei der Abarbeitung von p durchlaufenen Zustände von $\mathfrak{A}$, sowie mit $U_{\mathfrak{A}}(p) =_{df} \bigcap_{v\sqsubset p} \{f(z_o,w)\colon v \sqsubset w \sqsubset p\}$ dieMenge aller bei der Abarbeitung von p unendlich oft durchlaufenen Zustände von $\mathfrak{A}$.

Im folgenden seien stets α eines der Symbole E oder U , sowie ϱ eine der Relationen " = ", " $\subseteq$ " oder " $\sqcap$ ", wobei $M \sqcap M' \Leftrightarrow_{df} M \cap M' \neq \emptyset$. Für einen Automaten $\mathfrak{A} = (X,Z,f,z_o)$ und ein $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{P}Z$ setzen wir

$$T(\mathfrak{A},\mathfrak{Z}) =_{df} \{p\colon p\in X^{\omega} \wedge \exists Z'(Z'\in\mathfrak{Z} \wedge \alpha_{\mathfrak{A}}(p)\ \varrho\ Z')\}.$$

Den Zusammenhang zwischen endlichen Automaten und regulären Folgenmengen gibt uns

<u>Satz 3.6.</u> (McNaughton) Eine Teilmenge P von X^{ω} ist genau dann regulär, wenn es einen Automaten $\mathfrak{A}$ und ein $\mathfrak{Z}$ mit

$$P = T^{U}_{=}(\mathfrak{A},\mathfrak{Z})$$ gibt.

Wir geben jetzt einige Beziehungen zwischen den verschiedenen Akzeptierungsbegriffen an.

<u>(3.7.)</u> (1) $T^{\alpha}_{\varrho}(\mathfrak{A},\mathfrak{Z}) = \bigcup_{Z'\in\mathfrak{Z}} T^{\alpha}_{\varrho}(\mathfrak{A},\{Z'\})$

(2) $T^{\alpha}_{\subseteq}(\mathfrak{A},\{Z'\}) = T^{\alpha}_{=}(\mathfrak{A},\mathfrak{P}Z')$

(3) $T^{\alpha}_{\subseteq}(\mathfrak{A},\{Z'\}) = X^{\omega} \setminus T^{\alpha}_{\sqcap}(\mathfrak{A},\{Z\setminus Z'\})$

(4) $T^{\alpha}_{=}(\mathfrak{A},\{Z'\}) = T^{\alpha}_{\subseteq}(\mathfrak{A},\{Z'\}) \cap \bigcap_{z\in Z'} T^{\alpha}_{\sqcap}(\mathfrak{A},\{\{z\}\})$

Das folgende Lemma wurde in /SW 1/ und in ähnlicher Form in /La/ bewiesen.

Lemma 3.8. (1) Es ist $T_{\sqcap}^{\alpha}(\mathcal{A}, \mathcal{Z}) = T_{\sqcap}^{\alpha}(\mathcal{A}, \{\bigcup_{Z' \in \mathcal{Z}} Z'\})$.

(2) Zu jedem Automaten $\mathcal{A}$ und jedem $\mathcal{Z}$ gibt es ein $\hat{\mathcal{A}}$ und ein $\hat{Z}'$ mit $T_{\subseteq}^{\alpha}(\mathcal{A}, \mathcal{Z}) = T_{\subseteq}^{\alpha}(\hat{\mathcal{A}}, \{\hat{Z}'\})$.

Beweis. (1) ist offensichtlich.

(2) Wir beweisen die Aussage nur für den schwierigeren Fall $\alpha = U$. Es sei $\mathcal{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_m\}$. Wir definieren $\hat{\mathcal{A}} = (X, \hat{Z}, \hat{f}, \hat{z}_o)$ wie folgt:

$$\hat{Z} =_{df} Z \times \mathcal{P}\{1, \ldots, m\} \quad , \quad \hat{z}_o =_{df} (z_o, \emptyset)$$

$$\hat{f}((z,M),x) =_{df} \begin{cases} (f(z,x), M \cap \{i: f(z,x) \in Z_i\}) & , \text{ falls } M \neq \emptyset \\ (f(z,x), \{i: f(z,x) \in Z_i\}) & , \text{ falls } M = \emptyset \end{cases}.$$

Der Automat $\hat{\mathcal{A}}$ arbeitet in der ersten Komponente seiner Zustände wie $\mathcal{A}$, und mit der zweiten " merkt " er sich, in welchen der Mengen Z_i, $1 \leq i \leq m$, er sich " in der letzten Zeit " ununterbrochen bewegt hat. Damit ist klar, daß $U_{\mathcal{A}}(p)$ Teilmenge eines Z_i ist, falls in $U_{\hat{\mathcal{A}}}(p)$ nur Zustände mit nichtleerer zweiter Komponente liegen.

Ist anderseits $U_{\mathcal{A}}(p) \subseteq Z_i$, so kann $U_{\hat{\mathcal{A}}}(p)$ keinen Zustand der Form $(z, \emptyset)$ enthalten.

Damit gilt offenbar $T_{\subseteq}^{U}(\mathcal{A}, \mathcal{Z}) = T_{\subseteq}^{U}(\hat{\mathcal{A}}, \{\hat{Z}'\})$ für $\hat{Z}' =_{df} Z \times (\mathcal{P}\{1, \ldots, m\} \setminus \{\emptyset\})$. ∎

Schließlich geben wir noch zwei Beziehungen zu $T(\mathcal{A}, Z')$ an.

(3.9.) (1) $\quad T_{\sqcap}^{E}(\mathcal{A}, \{Z'\}) = T(\mathcal{A}, Z') \cdot X^{\omega}$

(2) $\quad T_{\sqcap}^{U}(\mathcal{A}, \{Z'\}) = \mathcal{G}_{\delta}(T(\mathcal{A}, Z'))$

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen können wir als erste die regulären offenen und die regulären abgeschlossenen charakterisieren.

Satz 3.10. Es sei $P \subseteq X^{\omega}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent: (1) P ist regulär und offen.

(2) Es gibt eine reguläre Wortmenge W mit $P = W \cdot X^{\omega}$.

(3) Es gibt einen Automaten $\mathcal{A}$ und ein $\mathcal{Z}$ derart, daß $P = T_{\sqcap}^{E}(\mathcal{A}, \mathcal{Z})$.

Die Äquivalenz dieser Aussagen ergibt sich aus Corollar 3.4.(2), Lemma 3.8.(1), (3.9.)(1) und Satz 2.1.
Mit Hilfe der Komplementärbeziehungen zwischen offenen und abgeschlossenen Mengen, Aussage (3.7.)(3), Lemma 3.8.(2) und Corollar 3.4.(1) erhalten wir aus Satz 3.10.

Satz 3.11. Es sei $Q \subseteq X^\omega$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(1) Q ist regulär und abgeschlossen.
(2) Es gibt eine reguläre Wortmenge V mit $Q = \mathrm{ls}V$.
(3) Es einen Automaten $\mathfrak{A}$ und ein $\mathfrak{Z}$ derart, daß $Q = T^E_{\subseteq}(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z})$.

Die Aquivalenzen (1) $\Longleftrightarrow$ (3) der Sätze 3.10. und 3.11. ist in /La/ bewiesen, die vollständigen Sätze in /SW 1/.
Wir wenden uns nun den regulären F_σ - Mengen und den regulären G_δ - Mengen zu.

Satz 3.12. Für $P \subseteq X^\omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(1) P ist reguläre F_σ - Menge.
(2) Es gibt einen Automaten $\mathfrak{A}$ und ein $\mathfrak{Z}$ derart, daß $P = T^U_{\subseteq}(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z})$.
(3) Es gibt ein reguläres $W \subseteq X^*$ mit $P = X^\omega \setminus \mathcal{G}_\delta(W)$.
(4) Es gibt reguläre $W_i, V_i \subseteq X^*$ mit $P = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot \mathrm{ls}\, V_i$.

Beweis. (1) $\rightarrow$ (2). Da P regulär ist, gibt es ein $\mathfrak{A} = (X, Z, f, z_0)$ und ein $\mathfrak{Z} \subseteq \mathcal{P} Z$ mit $P = T^U_=(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z})$. Wir setzen dabei $T^U_=(\mathfrak{A}, \{Z'\}) \neq \emptyset$ für alle $Z' \in \mathfrak{Z}$ voraus. Die Behauptung erhalten wir dann mit den Aussagen (3.7.)(1) und (2), wenn wir $T^U_=(\mathfrak{A}, \{Z''\}) \subseteq P$ für beliebige $Z'' \subseteq Z' \in \mathfrak{Z}$ zeigen.
Wir nehmen an, es gebe ein $Z' \in \mathfrak{Z}$ und ein $Z'' \subseteq Z'$ mit $T^U_=(\mathfrak{A}, \{Z''\}) \nsubseteq P$. Daraus erhalten wir sofort $\emptyset \neq T^U_=(\mathfrak{A}, \{Z''\}) \subseteq X^\omega \setminus P$. Mithin gibt es Wörter w_0, w, $v \in X^*$ derart, daß $f(z_0, w_0) = f(z, w) = f(z, v) = z$ sowie $\{ f(z, w') : w' \sqsubseteq w \} = Z'$, $\{ f(z, v') : v' \sqsubseteq v \} = Z''$ für ein fest gewähltes $z \in Z''$ gelten. Wegen $U_{\mathfrak{A}}(w_0 \cdot v^\omega) = Z''$ haben wir $w_0 \cdot v \in \overline{P}$. Nach Satz 1.5. gibt es ein $W \subseteq X^*$ mit $\overline{P} = \mathcal{G}_\delta(W)$. Damit haben wir ein $w_1 \in W$ mit $w_1 \sqsubset w_0 \cdot v^\omega$. Es sei $w_1 \sqsubseteq w_0 \cdot v^{k_1}$. Betrachten wir nun

$p_1 =_{df} w_o \cdot v^k \cdot w \cdot v$, so gilt $p_1 \in \overline{P}$. Somit gibt es ein $w_2 \in W$ mit $w_1 \sqsubset w_2 \sqsubset p_1$. Es gelte $w_2 \sqsubseteq w_o \cdot v^{k_1} \cdot w \cdot v^{k_2}$. Wir betrachten jetzt $p_3 =_{df} w_o \cdot v^{k_1} \cdot w \cdot v^{k_2} \cdot w \cdot v^{\omega}$ und erhalten ein $w_3 \in W$ mit $w_2 \sqsubset w_3 \sqsubset p_2$. Führen wir diesen Prozeß ad infinitum weiter, so erhalten wir ein $p = w_o \cdot v^{k_1} \cdot w \cdot v^{k_2} \cdot w \cdot v^{k_3} \cdot w \cdot \ldots \in X^{\omega}$ und eine unendliche Familie $(w_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq W$ von Anfangswörtern von p. Damit ist $p \in \overline{P} = \mathcal{G}_{\delta}(W)$. Andererseits folgt aus der Konstruktion der Folge $p \in X^{\omega}$ leicht $U_{\mathfrak{A}}(p) = Z' \in \mathfrak{Z}$ und somit $p \in P = T^U_{=}(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z})$. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme falsch ist.

(2) $\to$ (3). Nach Lemma 3.8.(2) gibt es ein $\hat{\mathfrak{A}}$ und ein $\hat{Z}'$ mit $P = T^U(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z}) = T^U(\hat{\mathfrak{A}}, \{\hat{Z}'\})$. Damit haben wir $\overline{P} = T^U(\hat{\mathfrak{A}}, \{\hat{Z} \setminus \hat{Z}'\}) = \mathcal{G}_{\delta}(T(\mathfrak{A}, \hat{Z} \setminus \hat{Z}'))$ (s.(3.7.)(3) und (3.9.)(2)).

(3) $\to$ (4) ist die Aussage von Lemma 3.5.

(4) $\to$ (1) ergibtsich leicht mit Satz 3.11. ■

Wiederum mit Hilfe der Komplementärbeziehung erhalten wir

Satz 3.13. Für $Q \subseteq X^{\omega}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Q ist reguläre G_{δ} - Menge.

(2) Es gibt einen Automaten $\mathfrak{A}$ und ein $\mathfrak{Z}$ derart, daß $Q = T^U_{\sqcap}(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z})$.

(3) Es gibt ein reguläres $V \subseteq X^*$ mit $Q = \mathcal{G}_{\delta}(V)$.

(4) Es gibt reguläre t.u. Wortmengen W_i, V_i mit $Q = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot V_i^{\omega}$.

Beweis. Die Äquivalenz (1) $\leftrightarrow$ (3) erhält man aus Satz 3.12. durch Übergang zum Komplement. (2) $\leftrightarrow$ (3) ergibt sich aus Lemma 3.8.(1), (3.9.)(2) und Satz 2.1. Schließlich ist (3) $\leftrightarrow$ (4) schon im Beweis von Lemma 3.3. gezeigt worden. ■

Die Äquivalenzen (1) $\leftrightarrow$ (2) der Sätze 3.12. und 3.13. sind in /La/ enthalten, und die Äquivalenz (1) $\leftrightarrow$ (4) von Satz 3.13. in /Ch/, während die vollständigen Sätze aus /SW 1/ entnommen sind. Mit (3.7.)(1) und (3) erhalten wir nun die folgende Aussage, die auch schon in /La/ und /St 2/ gezeigt wurde.

<u>Corollar 3.14.</u> Die Menge der regulären Teilmengen von X^{ω} bildet eine Mengenalgebra, die schon durch die Menge der regulären F_{σ} - Teilmengen (bzw. G_{δ} - Teilmengen) von X^{ω} erzeugt wird.

Der letzte Satz dieses Abschnittes charakterisiert die regulären $F_{\sigma} \wedge G_{\delta}$ - Mengen. Er ist vollständig in /SW 1/ enthalten.

<u>Satz 3.15.</u> Für $Q \subseteq X^{\omega}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Q ist reguläre $F_{\sigma} \wedge G_{\delta}$ - Menge.

(2) Es gibt eine reguläre (σ,δ) - Menge $W \subseteq X^{*}$ mit $Q = \mathcal{G}_{\delta}(W)$.

(3) Es gibt reguläre t.u. Wortmengen W_i und reguläre Wortmengen V_i mit $Q = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot \mathrm{ls}\, V_i$.

(4) Es gibt reguläre abgeschlossene Mengen $Q_i \subseteq X^{\omega}$ und reguläre offene Mengen $P_i \subseteq X^{\omega}$ derart, daß

$$Q = \bigcup_{i=1}^{n} (Q_i \cap P_i) .$$

(5) Es gibt einen Automaten $\mathcal{O}\!\iota$ und ein $\mathfrak{Z}$ derart, daß $Q = T^{E}_{=}(\mathcal{O}\!\iota, \mathfrak{Z})$.

Beweis. (1) $\rightarrow$ (2). Zufolge Satz 3.13. gibtes reguläre V und V' mit $\overline{Q} = \mathcal{G}_{\delta}(V)$ und $Q = \mathcal{G}_{\delta}(V')$, für die wir wie im Beweis von Satz 1.8. $V \wedge V' = \emptyset$ und $e \in V'$ voraussetzen. Es reicht nun aus nachzuweisen, daß die im Beweis von Satz 1.8. definierte Wortmenge W regulär wird, falls V und V' regulär sind. Wir gehen dazu von einem Automaten $\mathcal{O}\!\iota = (X,Z,f,z_o)$ und Teilmengen Z', Z" von Z aus, für die $T(\mathcal{O}\!\iota,Z') = V$ und $T(\mathcal{O}\!\iota,Z'') = V'$ gelten, und konstruieren einen Automaten $\hat{\mathcal{O}\!\iota} = (X,\hat{Z},\hat{f},\hat{z}_o)$ und ein $\hat{Z}' \subseteq \hat{Z}$ mit $T(\hat{\mathcal{O}\!\iota},\hat{Z}') = W$. Wir setzen:

$$\hat{Z} =_{df} Z \times \{0,1\} \quad , \qquad \hat{z}_o =_{df} (z_o,1) \qquad \text{und}$$

$$\hat{f}((z,a),x) =_{df} \begin{cases} (f(z,x),0) \;, & \text{wenn } f(z,x) \in Z' \\ (f(z,x),1) \;, & \text{wenn } f(z,x) \in Z'' \\ (f(z,x),a) \;, & \text{anderenfalls} \;. \end{cases}$$

Der Automat $\hat{\mathcal{O}\!\iota}$ arbeitet im Prinzip wie $\mathcal{O}\!\iota$, merkt sich dabei aber noch, in welcher der Finalmengen Z' oder Z" $\mathcal{O}\!\iota$ zuletzt war. Damit erhalten wir $W = T(\hat{\mathcal{O}\!\iota},\hat{Z}')$ für $\hat{Z}' =_{df} Z \times \{1\}$.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) ergibt sich aus den Sätzen 2.6. und 1.8. Unter Verwendung der in (1.6.)(1) und den Lemmata 1.12, und 1.16. angegebenen Rechenregeln.

(2) $\longrightarrow$ (4) ergibtsich analog aus Satz 2.6. unter Zuhilfenahme von (1.9.)(1), (1.6.)(2) und Lemma 3.3.

(4) $\longrightarrow$ (1). Diese Richtung folgt leicht aus der Tatsache, daß sowohl die regulären Mengen, als auch die F G - Mengen eine Mengenalgebra bilden.

(4) $\Longleftrightarrow$ (5). Mit Hilfe der üblichen Kreuzproduktkonstruktion für Automaten zeigt man zunächst, daß die Klasse der $T^{E}_{=}$ akzeptierbaren Folgenmengen eine Mengenalgebra bildet. Dann folgt die Behauptung leicht mit (3.7.) und den Sätzen 3.10. und 3.11.

§ 4 Akzeptierung durch partielle und nichtdeterministische Automaten

Neben der Akzeptierung von Folgenmengen durch deterministische D-Automaten wurde in verschiedenen Arbeiten auch die Akzeptierung durch partielle und/oder nichtdeterministische Automaten betrachtet. An dieser Stelle sollen einige Sätze angegeben werden, die es erlauben, die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnittes zur Bestimmung der entsprechenden Klassen der durch partielle deterministische (PD-), nichtdeterministische (ND-) bzw. partielle nichtdeterministische (PN-) Automaten durch die sechs hier erwähnten Akzeptierungsbegriffe darstellbaren Folgenmengen anzuwenden.

Wir wenden uns zunächst den PD- Automaten zu und bemerken, daß wir eine Folge p von einem PD- Automaten nur dann als akzeptiert ansehen wollen, wenn wirklich $f(z_0,w)$ für alle $w \sqsubset p$ definiert ist. Damit ergibt sich folgende einfache Möglichkeit, die Menge $T_{\varrho}^{\alpha}(\mathfrak{A}, \mathfrak{z})$ für einen PD- Automaten mit Hilfe der Ergebnisse des vorhergehenden Paragraphen zu bestimmen.

Es sei $\mathfrak{A} = (X,Z,f,z_o)$. Wir setzen $\hat{\mathfrak{A}} =_{df} (X,\hat{Z},\hat{f},\hat{z}_o)$, wobei

$$\hat{Z} =_{df} Z \cup \{s\}, \qquad z_o =_{df} \begin{cases} z_o \ , & Z \neq \emptyset \\ s \ , & \text{sonst} . \end{cases}$$

$$\hat{f}(z,x) =_{df} \begin{cases} f(z,x), & \text{wenn } f(z,x) \text{ def.} \\ s \ , & \text{sonst.} \end{cases}$$

d.h. wir vervollständigen den PD-Automaten $\mathfrak{A}$ durch einen "Schluckzustand" s. Dann gilt offenbar

$$T^{\alpha}_{\varsigma}(\mathfrak{A},\mathfrak{Z}) = T^{\alpha}_{\varsigma}(\hat{\mathfrak{A}},\mathfrak{Z}) \cap T^{E}_{\subseteq}(\hat{\mathfrak{A}},\{Z\}).$$

Die Mengen $T^{E}_{\subseteq}(\mathfrak{A},\{Z\})$ sind abgeschlossene reguläre Folgenmengen, und außer der ~~der~~ offenen regulären Mengen sind sämtliche anderen in § 3 betrachteten Klassen regulärer Folgenmengen abgeschlossen bezüglich Durchschnitt mit abgeschlossenen regulären Mengen.

Somit ergeben sich bei den Akzeptierungsbegriffen $T^{E}_{\subseteq}$, $T^{E}_{=}$, $T^{U}_{\subseteq}$, $T^{U}_{\cap}$ und $T^{U}_{=}$ keine Veränderungen, wenn man PD- Automaten zur Akzeptierung benutzt.

Wir betrachten nun den übriggebliebenen Fall.

<u>Satz 4.1.</u> Für $Q \subseteq X^{\omega}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Es gibt einen PD- Automaten $\mathfrak{A}$ und ein $\mathfrak{Z}$ derart, daß $Q = T^{E}_{\cap}(\mathfrak{A},\mathfrak{Z})$,

(2) Es gibt eine reguläre offene Menge P und eine reguläre abgeschlossene Menge P' derart, daß $Q = P \cap P'$.

(3) Q ist reguläre $G_\delta \triangle F$ - Menge .

(4) Es gibt reguläre Wortmengen W_i, V_i derart, daß $\bigcup_{i=1}^{n} W_i$ t.u. Teilmenge von X^* ist und $Q = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot \text{ls}\ V_i$.

Beweis. (1) $\rightarrow$ (2) Diese Richtung wurde schon oben gezeigt.

(2) $\rightarrow$ (3) ist offensichtlich.

(3) $\rightarrow$ (2) Es sei $Q = P \cap P'$. Dann haben wir $C(Q) \subseteq P'$, und somit ist $C(Q) \cap \overline{Q} = C(Q) \cap (\overline{P} \cup \overline{P'})$ eine abgeschlossene Menge. Weiterhin gilt $Q = C(Q) \cap (\overline{C(Q) \cap \overline{Q}})$. Da Q regulär ist, haben wir mit Lemma 3.1.(2) die gewünschte Darstellung.

(2) $\rightarrow$ (4) Es sei $Q = W\cdot X^{\omega} \cap P'$, wobei W regulär sei. Wir können nun W durch $\min W$, die Menge der bezüglich "$\sqsubseteq$" minimalen Elemente von W ersetzen. Wegen $\min W = W \setminus W\cdot X\cdot X^{*}$ ist mit W auch $\min W$ regulär. Der Kürze halber sei O.B.d.A. $V = \min W$. Offenbar ist dann V t.u. Menge. Weiterhin haben wir dann $Q = \bigcup_{w\in V} w\cdot X^{\omega} \cap P' = \bigcup_{w \in V} w.(P'/w)$. Analog zu Satz 2.2.(2) sind für reguläres P' die Mengen $W_w =_{df} \{v : P'/v = P'/w\}$ ebenfalls regulär. Somit erhalten wir $Q = \bigcup_{w\in V} (V \cap W_w)\cdot(P'/w)$. Die Vereinigung erweist sich dabei als endlich, da P' endliches Gewicht hat, und da die Mengen $V \cap W_w$ sämtlich regulär und $\bigcup_{w\in V} V \cap W_w = V$ t.u. Menge ist, ergibt sich die Behauptung leicht daraus, daß P'/w regulär und abgeschlossen ist.

(4) $\rightarrow$ (1) Wir haben nur zu zeigen, daß sich $Q = \bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot \mathrm{ls}V_i$ als Schnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen Menge darstellen läßt. Berechnen wir $C(Q)$ mit den Formeln des ersten Abschnitts, so erhalten wir $C(Q) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{ls}W_i \cup W_i\cdot\mathrm{ls}V_i = \mathrm{ls}\bigcup_{i=1}^{n} W_i \cup \bigcup_{i=1}^{n} W_i\cdot \mathrm{ls}V_i$. Da $\bigcup_{i=1}^{n} W_i$ t.u. ist, folgt mit Lemma 1.16.(2) die Gleichung $Q = C(Q) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} W_i)\cdot X^{\omega}$. ∎

Um die durch ND - und NP -Automaten darstellbaren Folgenmengen charakterisieren zu können, greifen wir ein von TRACHTENBROT in /TB/ formulierte Idee der Beziehung zwischen deterministischen und nichtdeterministischen Automaten mittels Projektionen auf. Zunächst definieren wir, wann eine Folgenmenge P von einem NP- Automaten $\mathfrak{A}$ (und damit auch von einem ND- Automaten) akzeptiert heißt. Dazu nennen wir für $\mathfrak{A} = (X,Z,f,z_o)$ die Abbildung $r : N \mapsto Z$ einen $\mathfrak{A}$ - Weg über $p \in X^{\omega}$, wenn $r(0) = z_o$ sowie $r(n+1) \in f(r(n), p(n))$, wobei $p(n)$ den n-ten Buchstaben der Folge p bezeichne.

Wir definieren

$$T_{\mathfrak{Z}}^{\alpha}(\mathfrak{A},\mathfrak{Z}) =_{df} \{ p: p \in X^{\omega} \wedge \exists Z' \exists r(r \text{ ist } \mathfrak{A}\text{-Weg über } p \wedge Z' \in \mathfrak{Z} \wedge \wedge \alpha(r) \varrho Z')\}, \text{ wobei}$$

$E(r) =_{df} r(N)$ und $U(r) =_{df} \bigcap_{n\in N} r(n + N)$ die Menge aller auf

dem $\mathfrak{A}$-Weg r über p durchlaufenen bzw. uendlich oft durchlaufenen Zusttäde von istt.
Im folgenden werden wir Alphabete der Form XxY betrachten.
Mit Pr_i bezeichnen wir die Projektion auf die i-te Komponente, die in natürlicher Weise auf $(X\times Y)^* \cup (X\times Y)^\omega$ fortgesetzt werde.
Es sei $\mathfrak{A} = (X\times Y, Z, f, z_0)$ ein NP-Automat. Setzen wir $\hat{\mathfrak{A}} =_{df} (X, Z, \hat{f}, z_0)$ mit (ö) $\hat{f}(z,x) =_{df} \bigcup_{y\in Y} f(z,(x,y))$, so gilt offenbar:
Eine Abbildung $r: N \longmapsto Z$ ist genau dann $\hat{\mathfrak{A}}$-Weg über $p \in X^\omega$, wenn r ein $\mathfrak{A}$-Weg über einem $q \in (X\times Y)^\omega$ mit $Pr_1 q = p$ ist.
Außerdem ist $\hat{\mathfrak{A}}$ ein ND-Automat, falls $\mathfrak{A}$ voll definiert ist.
Hieraus folgt unmittelbar(Bezeichnungen wie oben)

<u>Lemma 4.2.</u> Es sei $T^\alpha_\varrho(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z}) = Q \subseteq (X\times Y)^\omega$. Dann gilt
$$Pr_1 Q = T^\alpha_\varrho(\hat{\mathfrak{A}}, \mathfrak{Z}) .$$

Umgekehrt haben wir

<u>Lemma 4.3.</u> Es sei $\hat{\mathfrak{A}}$ ein NP-(ND-) Automat mit $T^\alpha_\varrho(\hat{\mathfrak{A}}, \mathfrak{Z}) = Q$.
Dann gibt es einen DP-(D-) Automaten $\mathfrak{A}$ derart, daß $Q = Pr_1\, T^\alpha_\varrho(\mathfrak{A}, \mathfrak{Z})$.

Beweis. Wir gehen in der o.a. Konstruktion (vgl. (ö)) rückwärts. Wir setzen $Y =_{df} Z$ und

$$(1)\quad f(z,(x,z')) =_{df} \begin{cases} z' & \text{, falls } z' \in f(z,x) \\ \text{nicht definiert,} & \text{sonst} \end{cases} ,$$

im partiellen Falle. Im Falle, daß $\hat{\mathfrak{A}}$ volldefiniert ist, wählen wir aus jeder Menge f(z,x) ein z_x fest aus und setzen

$$(2)\quad f(z,(x,z')) =_{df} \begin{cases} z' & \text{, falls } z' \in f(z,x) \\ z_x & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Man verifiziert leicht, daß der so aus $\hat{\mathfrak{A}} = (X, Z, f, z_0)$ konstruierte Automat $\mathfrak{A} = (X\times Z, Z, f, z_0)$ im Falle (1) ein DP- und im Falle (2) ein D-Automat ist, der (als NP-Automat betrachtet) die Bedingung (ö) erfüllt. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.2. ∎

Mit den Sätzen dieses Abschnittes können wir nun die von den verschiedenen Automatentypen bezüglich unserer sechs Akzeptierungsbegriffe akzeptierten Klassen regulärer Folgenmengen angeben:

	D	DP	ND	NP
$T^E_{\subseteq}$	$F \wedge R$	$F \wedge R$	$F \wedge R$	$F \wedge R$
$T^E_{\sqcap}$	$G \wedge R$	$(G \triangle F) \wedge R$	$G \wedge R$	$F_\sigma \wedge R$
$T^E_{=}$	$F_\sigma \wedge G_\delta \wedge R$	$F_\sigma \wedge G_\delta \wedge R$	$F_\sigma \wedge R$	$F_\sigma \wedge R$
$T^U_{\subseteq}$	$F_\sigma \wedge R$	$F_\sigma \wedge R$	$F_\sigma \wedge R$	$F_\sigma \wedge R$
$T^U_{\sqcap}$	$G_\delta \wedge R$	$G_\delta \wedge R$	R	R
$T^U_{=}$	R	R	R	R

(R stehe dabei abkürzend für die Klasse der regulären Folgenmengen.)

Die beiden ersten Spalten dieser Tabelle geben die Sätze des Abschnittes 3 sowie Satz 4.1. wieder. Die restlichen Spalten leiten sich mittels Projektion (vgl. die Lemmata 4.2. und 4.3.) aus den ersten beiden ab.
Das Ergebnis der Stelle $(ND, T^U_{\sqcap})$ folgt aus den Arbeiten /Bü/ und /MN/. Da die Klassen G, F, F_σ, und R stabil bezüglich Projektionen sind (/Ku/ bzw. /TB/), brauchen wir nur noch zu zeigen, daß jede reguläre F_σ - Menge Projektion einer geeigneten Menge aus $(G \triangle F) \wedge R$ ist, und die Ergebnisse der letzten beiden Spalten sind unmittelbar einzusehen.
Zu diesem Zwecke definieren wir für $B \subseteq X^* \cup X^\omega$ und $B' \subseteq Y^* \cup \cup Y^\omega$ ein modifiziertes Kreuzprodukt

$$B \otimes B' =_{df} \{ b: b \in (XxY)^* \cup (XxY)^\omega \wedge Pr_1 b \in B \wedge Pr_2 b \in B' \} .$$

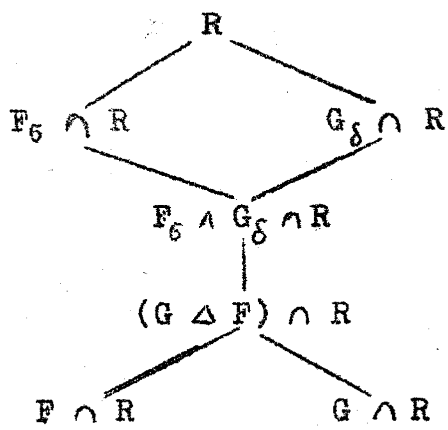
Damit gilt $\bigcup_{i=1}^{n} W_i \cdot ls\ V_i = Pr_1 (\bigcup_{i=1}^{n} (W_i \otimes 0^* \cdot i) \cdot (ls\ V_i \otimes 0^\omega))$ für $Y = \{0, \dots, n\}$, und unsere Behauptung folgt leicht mit den Sätzen 3.12. und 4.1.
Neben der von Büchi und McNaughton gezeigten Beziehung $(D, T^U_{=}) = (ND, T^U_{\sqcap})$ sind außerdem bekannt:

1. aus /Ho/ : $(D, T^U_{\subseteq}) = (ND, T^U_{\subseteq})$, $(D, T^E_{\subseteq}) = (ND, T^E_{\subseteq})$ und $(D, T^E_{\sqcap}) = (ND, T^E_{\sqcap})$

2. aus /TB/ : $(NP, T_\Pi^U) = R$ und $(NP, T_\Pi^E) = (NP, T_\leq^U)$
3. aus /SW 1/ sämtliche Ergebnisse, voll definierte Automaten betreffend, sowie
4. aus /Wa 2/ sämtliche Ergebnisse .

§ 5 Inklusionsbeziehungen und Abgeschlossenheitseigenschaften

Ein Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß die im folgenden Diagramm



dargestellten Inklusionsbeziehungen die einzig gültigen und sämtlich echt sind. Wir geben dazu Beispiele an. Es sei $X = 0,1$

(1) 0^ω ist abgeschlossen, aber als endliche Menge nicht offen.

(2) $0^* \cdot 1 \cdot X^\omega = X^\omega \setminus 0^\omega$ ist demzufolge offen, aber nicht abgeschlossen.

(3) Die Menge $0^* 1 \cdot 0^\omega = (0^\omega \cup 0^* \cdot 10^\omega) \cap 0^* 1 \cdot X^\omega$ ist weder offen noch abgeschlossen, aber Schnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen regulären Menge

(4) $X^* \cdot 0^\omega$ ist abzählbar und dicht in sich. Demzufolge (vgl. /Ku/) ist $X^* \cdot 0^\omega$ zwar F_σ -Menge, aber keine G_δ -Menge.

(5) $(0^* \cdot 1)^\omega = X^\omega \setminus X^* \cdot 0^\omega$ ist also G_δ - aber keine F_σ -Menge.

(6) $P = 0 \cdot X^* \cdot 0^\omega \cup 1 \cdot (0^* \cdot 1)^\omega$ ist weder F_σ - noch G_δ -Menge, da $P \cap 0 \cdot X^\omega$ keine G_δ - und $P \cap 1 \cdot X^\omega$ keine F_σ -Menge ist.

Damit sind alle Inklusionen bis auf
$(G \vartriangle F) \cap R \subset (F_\sigma \wedge G_\delta) \cap R$ gezeigt.

Dazu bemerken wir

Lemma 5.1. Eine Menge $P \subseteq X^{\omega}$ ist nur dann Schnitt einer offenen mit einer abgeschlossenen Menge, wenn $C(P) \cap \overline{P}$ abgeschlossen ist.

Der Beweis dieser Behauptung wurde schon im Beweis von Satz 4.1. Teil (3) $\rightarrow$ (2) gegeben.

(7) Betrachten wir $Q = 0^{\omega} \cup (X^{*} \cdot 1)^{2} \cdot X^{\omega}$. Offensichtlich ist Q sowohl F_{σ} - als auch G_{δ} -Menge. Andererseits ist aber $C(Q) = X^{\omega}$ und damit $C(Q) \cap \overline{Q} = \overline{Q} = 0^{*} \cdot 1 \cdot 0^{\omega}$ nicht abgeschlossen.

Abgeschlossenheitseigenschaften der topologischen Klassen regulärer Folgenmengen wurden auch schon in den voranstehenden Paragraphen untersucht, so z. B. ergaben sich in § 3 Aussagen über die kleinste Boolesche Algebra, die eine gegebene topologische Klasse regulärerFolgenmengen enthält (Corollar 3.14. bzw. Satz 3.15.), oder in § 4 wurden mit Hilfe des Abschlusses gegenüber Projektionen die Ergebnisse für ND- bzw. NP-akzeptierbare Klassen erzielt.

Wir werden jetzt die Abgeschlossenheit der sieben betrachteten Klassen gegenüber den Operationen $\cap$, $\cup$, $\overline{}$ sowie gegenüber Multiplikation mit regulären ("W·") bzw. t.u. regulären ("V·") Wortmengen untersuchen. Zunächst stellen wir die Ergebnisse in einer Tabelle dar.

	$F \cap R$	$G \cap R$	$(G \Delta F) \cap R$	$F_{\sigma} \wedge G_{\delta} \cap R$	$F_{\sigma} \cap R$	$G_{\delta} \cap R$	R
$\cap$	+	+	+	+	+	+	+
$\cup$	+	+	-	+	+	+	+
$\overline{}$	-	-	-	+	-	-	+
W·	-	+	-	-	+	-	+
V·	-	+	+	+	+	+	+

Wir kommentieren nun die einzelnen Zeilen.

" $\cap$ ": Diese Zeile ist leicht einzusehen.

" $\cup$ ": Hier ist nur die Spalte $(G \Delta F) \cap R$ zu zeigen. Dazu betrachten wir die Menge Q aus (7). Q ist Vereinigung einer offenen regulären mit einer abgeschlossenen regulären Menge, aber selbst nicht einmal in $(G \Delta F) \cap R$.

" $^{-}$ ": Hier ist wiederum nur die Spalte $G \Delta F$ zu zeigen. Die Nichtabgeschlossenheit der Klassen $F \wedge R$, $G \wedge R$, $G_\delta \cap R$ und $F_\sigma \wedge R$ zeigen unsere Beispiele (1), (2), (4) und (5). Die Klassen $F_\sigma \wedge G_\delta \cap R$ sowie R sind bezüglich Komplementbildung abgeschlossen. Wäre $(G \Delta F) \wedge R$ bezüglich " $^{-}$ " abgeschlossen, dann folgte die Abgeschlossenheit bezüglich " $\cup$ ", was aber nicht der Fall ist.

" W• ": Es ist $X^*\cdot 0^\omega$ als Produkt der Wortmenge X^* mit der abgeschlossenen Menge 0^ω eine F_σ-, aber keine G_δ-Menge. Damit ist die Nichtabgeschlossenheit der vier Klassen gezeigt. Die Abgeschlossenheit von $G \cap R$ und $F_\sigma \cap R$ folgt aus der Darstellung durch reguläre Wortmengen (Sätze 3.10. und 3.12.), die Abgeschlossenheit von R aus der Definition.

" V• ": Es ist $(0^*\cdot 1)\cdot 0^\omega$ keine abgeschlossene Menge. Somit ist die Nichtabgeschlossenheit bzgl. " V• " erklärt. Die drei zusätzlichen Abgeschlossenheitseigenschaften gegenüber der darüberliegenden Zeile ergeben sich aus der Darstellung durch reguläre Wortmengen (Sätze 3.13., 3.15.,4.1.) sowie der Tatsache, daß das Produkt zweier t.u. Wortmengen wiederum eine t.u. Menge ist.

§ 6 Maß und Kategorie

Dieser letzte Abschnitt beschäftigt sich mit den Beziehungen zwischen Maßtheorie und Topologie bei regulären Mengen. Dabei betrachten wir die natürlichen Topologien, die in § 1 eingeführt wurden, sowie die diesen Topologien angepaßten Maße über X^* bzw. X^ω.

Im folgenden sei mit μ stets ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X bezeichnet, das die Bedingung $\mu(x) > 0$ für $x \in X$ erfüllt. Wir dehnen μ auf die folgende Weise zu einem Maß auf ganz X^* aus:

$$\mu(e) =_{df} 1$$

$$\mu(w\cdot v) =_{df} \mu(w)\cdot\mu(v).$$

Weiterhin bezeichnen wir mit $\bar{\mu}$ das durch μ indizierte Produktmaß auf X^{ω}.
Für die Produkttopologie in X^{ω} und das Produktmaß $\bar{\mu}$ auf X^{ω} werden wir Verträglichkeit von Maß und Kategorie, wie sie in der Monographie von Oxtoby (vgl./Ox/ Kap. 19 ff.) erörtert wurde, untersuchen. Während Oxtoby im Kap. 22 seiner Arbeit beschreibt, wie die Topologie dem Maß angepaßt werden kann, gehen wir in dieser Arbeit den Weg, eine geeignete Familie von Teilmengen (vgl./SW 2/) des Raumes X^{ω} anzugeben, für die Maß und Kategorie verträglich sind. Die Beispiele sollen dabei illustrieren, daß schon für "geringfügige" Erweiterungen dieser Familie Maß und Kategorie nicht mehr verträglich sind.
Für den Raum X^{*} geben wir ebenfalls Sätze an, die man als eine Verträglichkeit von Maß und Kategorie auf den regulären Mengen werten kann.

Wir zählen vorerst einige Eigenschaften der Maße μ und $\bar{\mu}$ auf:

<u>(6.1.)</u> (1) μ ist σ-additives Maß auf der Potenzmenge $\wp X^{*}$ mit $(X\ ) = \ $.

(2) $\mu(W\cdot V) \leq \mu(W)\cdot\mu(V)$, und es gilt $\mu(W\cdot V) = \mu(W)\cdot\mu(V)$ falls W eine t.u.Menge ist.

(3) $\bar{\mu}$ ist σ-additives Maß auf der σ-Algebra der Borelmengen von X^{ω} mit $\mu(X^{\omega}) = 1$.

(4) $\bar{\mu}(W\cdot X^{\omega}) \leq \mu(W)$, und es ist $\bar{\mu}(W\cdot X^{\omega}) = \mu(W)$ falls W t.u. ist.

<u>(6.2.)</u> (1) Es ist $\mu(W^{*}) \leq \sum_{i\in N}(\mu(W))^{i}$ und es gilt $\mu(W^{*}) = \sum_{i\in N}(\mu(W))^{i}$ falls W t.u. ist.

(2) Es ist $\bar{\mu}(W^{\omega}) = 0$, falls $\mu(W) < 1$, und es gilt für t.u.Mengen W genau dann $\bar{\mu}(W^{\omega}) = 1$ wenn $\mu(W) = 1$.

Beweis. (1) ist offensichtlich.

(2) Da $W^{\omega} \subseteq \bigcap_{n\in N} W^{n}\cdot X^{\omega}$, gilt die erste Behauptung mit (1).

Die zweite folgt aus Lemma 1.16.(4), wobei nur zu bemerken ist, daß auf Grund von (6.1.) (4) für t.u.Mengen $W \subseteq X^{*}$ ohnehin $\mu(W) \leq 1$ erfüllt ist. ∎

Weiterhin gilt

<u>Lemma 6.3.</u> Es seien $W \subseteq X^*$ regulär, $\mu(W) < \infty$. Dann ist $\mu(A(W)) < \infty$.

Beweis. Da W regulär ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ derart, daß für jedes $w' \in A(W)$ ein $w \in$ mit $w' \sqsubseteq W$ und $/w/-/w'/ \leq k$ existiert. ($/w/$ bezeichne hier die Länge des Wortes w.)
Damit haben wir $A(W) = \bigcup_{i=0}^{k} W_i$, wobei

$W_i =_{df} \{v : \exists v'(/v'/ = i \wedge v \cdot v' \in W)\}$.

Weiterhin ist $\mu(W_i) \leq c^{-i} \cdot \mu(W)$ für $c =_{df} \min_{x \in X} \mu(x)$.

Das folgende Beispiel zeigt uns, daß die Behauptung des Lemmas schon nicht für lineare Sprachen gilt. In den Beispielen dieses Paragraphen sei stets $X = \{0,1\}$ vorausgesetzt.

Beispiel 6.4. Es ist $V =_{df} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n \cdot 1 \cdot 0^n$ eine lineare Sprache mit $\mu(V) = \sum_{n \; \mathbb{N}} \mu(1) \cdot \mu(0)^n = 1$. Weiterhin ist $A(V) = X^*$ und damit $\mu(A(V)) = \infty$. □

Eine Beziehung zwischen den Maßen μ und $\tilde{\mu}$ vermittelt uns der $\mathcal{G}_\delta$-Operator.

<u>Lemma 6.5.</u> Es sei $Q \subseteq X^\omega$ eine G_δ-Menge. Die Beziehung $\mu(Q) = 0$ gilt genau dann, wenn es ein $V \subseteq X^\omega$ mit $Q = \mathcal{G}_\delta(V)$ und $\mu(V) < \infty$ gibt. Wir führen zunächst eine Vorbetrachtung durch. Dazu setzen wir $W^{(k)} =_{df} \{w : w \in W \wedge w$ hat in W genau k Vorgänger bezüglich "$\sqsubseteq$"$\}$.
Offenbar haben wir dann $W = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} W^{(k)}$ und $W^{(k)} \cap W^{(m)} = \emptyset$ für $k \neq m$. Weiterhin gelten $W^{(k)}$ ist t.u.Menge und $W^{(k)} \cdot X^\omega \supseteq W^{(m)} \cdot X^\omega$ für $k \leq m$. Schließlich ist $\mathcal{G}_\delta(W) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W^{(k)} \cdot X^\omega$.

Beweis von Lemma 6.5. Es sei $\mu(W) < \infty$.
Dann ist $\bar{\mu}(\mathcal{G}_\delta(W)) = \lim_{k\to\infty} \bar{\mu}(W^{(k)} \cdot X^\omega) = \lim_{k\to} \mu(W^{(k)}) = 0$.

Ist andererseits $\bar{\mu}(Q) = 0$ und $Q = \mathcal{G}_\delta(W)$, so gilt
$\lim_{k\to\infty} \mu(W^{(k)}) = \mu(\bigcap_{k\in N} W^{(k)} \cdot X^\omega) = \mu(Q) = 0$. Damit gibt es
eine unendliche Teilmenge N' von N derart, daß $\sum_{k\in N'} \mu(W^{(k)}) < \infty$.
Da N' unendlich ist, gelten $\bigcap_{k\in N'} W^{(k)} \cdot X^\omega = Q$ und somit
$Q = \mathcal{G}_\delta(\bigcup_{k\in N'} W^{(k)})$. ■

Nunmehr streben wir an, zu zeigen, daß für die regulären Mengen Maß und Kategorie verträglich sind. Das heißt: Wir haben auf Grund der unterschiedlichen Struktur der Räume X^* und X^ω zu zeigen:
(1) Eine reguläre Teilmenge von X^ω hat genau dann das Maß Null, wenn sie erster Kategorie (d.h. abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen) ist.
Und, da X^* selbst Menge erster Kategorie ist (weil abzählbar), im anderen Falle.
(2) Eine reguläre Teilmenge von X^* hat genau dann endliches Maß, wenn sie nirgends dicht ist.

Nach dieser Ankündigung der Resultate werden wir uns zunächst mit den nirgends dichten Mengen beschäftigen.

<u>Satz 6.6.</u> (1) Eine Teilmenge P von X^ω ist genau dann nirgends dicht, wenn $\forall w(w \in X^* \to \exists v(v \in X^* \wedge w \cdot v \notin A(P)))$ gilt.
(2) Eine Teilmenge W von X^* ist genau dann nirgends dicht, wenn $\forall w(w \in X^* \to \exists v(v \in X^* \wedge w \cdot v \notin A(W))$ gilt.

Beweis. Wir beweisen nur (1). Der Beweis von (2) verläuft analog.

Ist P nirgends dicht, so enthält $X^{\omega} \setminus P$ eine in X^{ω} dichte offene Menge $V \cdot X^{\omega}$. Damit gibt es zu jedem $w \in X^*$ ein $v \in X^*$ derart, daß $w \cdot v \in V \cdot X^*$ gilt. Wegen $P \cap V \cdot X^{\omega} = \emptyset$ gilt nun $A(P) \subseteq X^* \setminus V \cdot X^*$, und die Bedingung ist erfüllt. Ist andererseits die Bedingung erfüllt, so kann $C(P)$ offenbar keine Teilmenge der Form $w \cdot X^{\omega}$, d.h. keine nichtleere offene Teilmenge enthalten. Mithin sind $C(P)$ und auch P nirgends dicht. ∎

Ein Vergleich der Bedingungen in (1) und (2) von Satz 6.6. ergibt nun

<u>Corollar 6.7.</u> Eine Teilmenge P von X^{ω} ist genau dann nirgends dicht, wenn $A(P)$ nirgends dicht ist.

Für den nun folgenden Satz, der die Aussage von Corollar 6.7. verschärft, stellen wir eine Vorbetrachtung an:
Es sei $W \subseteq X^*$ nicht nirgends dicht. Somit gibt es ein $v \in X^*$ mit $v \cdot X \subseteq A(W)$. Daraus läßt sich unschwer ableiten, daß $\mathcal{G}_\delta(W) \cap v \cdot X^{\omega} \neq \emptyset$ ist. Somit haben wir

<u>(6.8.)</u> Ist $\mathcal{G}_\delta(W) = \emptyset$, so ist W nirgends dicht.
Damit erhalten wir

<u>Lemma 6.9.</u> Eine Teilmenge W von X^* ist genau dann nirgends dicht, wenn $\mathcal{G}_\delta(W)$ nirgends dicht ist.

Beweis. Ist W nirgends dicht, so gibt es nach Satz 6.6. zu jedem $w \in X$ ein $v \in X$ mit $w \cdot v \cdot X^* \cap W = \emptyset$ und somit auch $w \cdot v \cdot X^{\omega} \cap \mathcal{G}_\delta(W) = \emptyset$.
Damit ist $\mathcal{G}_\delta(W)$ nirgends dicht.
Ist nun $\mathcal{G}_\delta(W)$ nirgends dicht, so ist zufolge Corollar 6.7. $A(\mathcal{G}_\delta(W))$ nirgends dicht. Wegen $\mathcal{G}(A(\mathcal{G}_\delta(W))) \supseteq \mathcal{G}_\delta(W)$ gilt $\mathcal{G}_\delta(W \setminus A(\mathcal{G}_\delta(W))) = \emptyset$.
Damit sind $W \setminus A(\mathcal{G}_\delta(W))$ und somit auch W als Teilmenge der Vereinigung zweier nirgends dichter Mengen nirgends dicht. ∎

Für Mengen endlichen Gewichts lassen sich die Bedingungen von Satz 6.6. folgendermaßen verschärfen

Satz 6.10. (1) Hat $Q \subseteq X^{\omega}$ endliches Gewicht, so ist Q genau dann nirgends dicht, wenn $\exists v(v \in X^{*} \wedge \forall w(w \in X^{*} \rightarrow w \cdot v \notin A(Q)))$ gilt.
(2) Hat $V \subseteq X^{*}$ endliches Gewicht, so ist V genau dann nirgends dicht, wenn $\exists v(v \in X \wedge \forall w(w \in X \rightarrow w \cdot v \notin A(V)))$ gilt.

Beweis. Wir zeigen wiederum nur (1). Außerdem genügt es, die Gültigkeit der angegebenen Bedingung nachzuweisen.
Da Q nirgends dicht ist, sind auch alle Zustände Q/w nirgends dicht. Somit ist $\bigcup_{w \in X^{*}} Q/w$ als endliche Vereinigung nirgends dichter Mengen nirgends dicht. Damit gibt es nach Satz 6.6. ein $v \in X^{*}$ mit $v \notin A(\bigcup_{w \in X^{*}} Q/w)$, d.h. für alle $w \in X$ gilt $w \cdot v \notin A(Q)$. ∎

Corollar 6.11. (1) Hat $Q \subseteq X^{*}$ endliches Gewicht, so ist Q genau dann nirgends dicht, wenn es ein $v \in X^{*}$ mit $Q \subseteq (X^{/v/} \setminus \{v\})^{\omega}$ gibt.
(2) Hat $V \subseteq X^{*}$ endliches Gewicht, so ist V genau dann nirgends dicht, wenn es ein $v \in X^{*}$ mit $V \subseteq A((X^{/v/} \setminus \{v\})^{*})$. gibt.

Beweis. Erneut zeigen wir nur (1). Aus Satz 6.10. wissen wir, daß $Q \subseteq X^{\omega} \setminus X^{*} \cdot v \cdot X^{\omega}$ für geeignetes $v \in X^{*}$ gilt, falls Q nirgends dicht ist. Die Bedingung folgt nun einfach aus der Inklusion $X^{*} \setminus X^{*} \cdot v \cdot X^{\omega} \subseteq (X^{/v/} \setminus \{v\})^{\omega}$. Offenbar ist die Menge $(X^{/v/} \setminus \{v\})^{\omega}$ nirgends dicht. Somit ist die Bedingung auch hinreichend. ∎

Das folgende Beispiel soll uns verdeutlichen, daß die Voraussetzung Q bzw. V habe endliches Gewicht in Satz 6.10. notwendig ist.

Beispiel 6.12. Wir setzen $W =_{df} \bigcup_{n \in N} 0^{n} \cdot 1 \cdot X^{n}$.

Dann sind W und auch $W \cdot 1 \cdot 0^{\omega}$ nirgends dicht, aber die Bedingungen von Satz 6.10. sind nicht erfüllt. □

Wir kommen jetzt zu den angekündigten Beziehungen zwischen Maß und Kategorie.

Satz 6.13. Es sei $W \subseteq X^*$.regulär. Die Menge W hat genau dann endliches Maß, wenn sie nirgends dicht ist.

Beweis. Ist W nicht nirgends dicht, so gibt es ein $w \in X^*$ mit $w \cdot X^* \subseteq A(W)$. Damit ist $\mu(A(W)) = \infty$ und wegen Lemma 6.3. auch $\mu(W) = \infty$. Ist andererseits W nirgends dicht, so haben wir mit Corollar 6.11.(2) $W \subseteq A((X^{/v/} \setminus \{v\})^*)$ für geeignetes $v \in X^*$. Es reicht nun aus, $\mu((X^{/v/} \setminus \{v\})^*) < \infty$ zu zeigen. Dies folgt wegen $\mu(v) > 0$ mit (6.2.)(1). ∎

Anmerkung: Ein zu Satz 6.13. analoger Sachverhalt für ein nicht σ-additives endliches Maß auf X^* wurde in /BK/ angegeben. Dort findet sich auch die Aussage von Satz 6.10.(2).

Wir geben wiederum ein Beispiel dafür an, daß die Regularität von W für die Aussage von Satz 6.13. notwendig ist.

Beispiel 6.14. (1) Es ist $W = \bigcup_{n \in N} 0^n \cdot 1 \cdot A(X^{n!})$ nirgends dicht, aber man rechnet leicht $\mu(W) = \infty$ nach.

(2) Wir benutzen hier die aus /GR/ bekannte Methode der Definition kontextfreier Wortmengen als Minimallösungen von Gleichungssystemen. Damit läßt sich unter bestimmtem Voraussetzungen das Maß der Mengen einfach berechnen. Aus /Ma/ läßt sich folgende einfache Methode herleiten: Es seien $V_1 \cup V_2 = X^k$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Bestimmen wir dann V als Minimallösung der Gleichung $V = V_1 \cup V_2 \circ V^n$, so gelten

(1) V ist t.u. Menge, und somit $\mu(V) \leq 1$.

(2) Es ist $\mu(V) = 1$ genau dann, wenn $\mu(V_2) \leq \frac{1}{n}$.

(3) Es gibt einen deterministischen push-down Automaten, der V akzeptiert (vgl. /Gi/).

(4) V^* ist dicht in X^*.

Setzen wir nun $V_1 =_{df} \{01, 10\}$, so gilt $\mu(V_2) \geq \frac{1}{2}$, und für $n = 3$ erhalten wir $\mu(V) < 1$ und mithin $\mu(V^*) < \infty$. Daher ist V^* eine dichte Menge endlichen Maßes in X^*.

An dieser Stelle wollen wir noch ein Wort zur Wahl der angeführten Beispiele sagen. Es wurde angestrebt und bis auf Beispiel 6.14.(1) auch erreicht, daß sämtliche Mengen durch deterministische push-down Automaten (DPDA)akzeptierbar sind. Für die Wortmengen vergleiche man dazu etwa die Monographie von Ginsburg /Gi/ und für die Folgenmengen die Arbeit von Linna /Li/. Zur letzteren bemerken wir noch ergänzend:

(6.15.) Ist $V \subseteq X^*$ eine t.u. Menge und durch einen DPDA akzeptierbar, so sind auch V^ω, $X^\omega \setminus V^\omega$, $V \cdot X^\omega$ und $X^\omega \setminus V \cdot X^\omega$ DPDA-akzeptierbare Folgenmengen.

Weiter werden die in den folgenden Beispielen konstruierten Mengen endliches Gewicht haben, soweit das möglich ist. Für die in Beispiel 6.14.(2) definierten Mengen V hat z.B. V endliches Gewicht, da $V^\omega = V \cdot V^\omega = (V_1 \cup V_2 \cdot V^n) \cdot V^\omega$

$$= (V_1 \cup V_2) \cdot V^\omega = X^k \cdot V^\omega \text{ gilt.}$$

Wir wenden uns nun der Beziehung zwischen Maß und Kategorie in X^ω zu. Wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 6.13. zeigt man

Lemma 6.16. Es habe $Q \subseteq X^\omega$ endliches Gewicht. Ist Q nirgends dicht, so gilt $\bar{\mu}(Q) = 0$.

Im weiteren bezeichnen wir mit J(P) den offenen Kern der Menge $P \subseteq X^\omega$. Mit Lemma 3.1.(2) erhalten wir dann:
Es ist J(P) regulär, falls P endliches Gewicht hat.
Wir haben nun

Satz 6.17. Ist $P \subseteq X^\omega$ reguläre F_σ-Menge, so gilt $\bar{\mu}(P) = \bar{\mu}(J(P))$.

Beweis. Nach Satz 3.12. läßt sich P als $P = \bigcup_{i \in N} P_i$ darstellen, wobei die P_i regulär und abgeschlossen sind. Dann ist
$P \setminus J(P) = \bigcup_{i \in N} (P_i \setminus J(P))$.
Die Mengen $P_i \setminus J(P)$ sind regulär und als Teilmengen von $P_i \setminus J(P_i)$ nirgends dicht. Damit leiten sich aus Lemma 6.16. unmittelbar $\bar{\mu}(P \setminus J(P)) = 0$ und also $\bar{\mu}(P) = \bar{\mu}(J(P))$ ab. ∎

Wir haben sofort

<u>Corollar 6.18.</u> Ist $Q \subseteq X^{\omega}$ reguläre G_{δ}-Menge, so gilt $\bar{\mu}(Q) = \bar{\mu}(C(Q))$.

<u>Corollar 6.19.</u> Für eine reguläre G_{δ}-Menge Q gilt genau dann $\bar{\mu}(Q) = 0$, wenn Q nirgends dicht ist.

Beweis. Ist Q nirgends dicht, so gilt $\mu(Q) = 0$ mit Lemma 6.16. Ist nun $\bar{\mu}(Q) = 0$, so erhalten wir mit Satz 6.17. und Corollar 6.18. sofort $0 = \bar{\mu}(Q) = \bar{\mu}(C(Q)) = \bar{\mu}(JC(Q))$, und daraus $JC(Q) = 0$ d.h. Q ist nirgends dicht. ∎

Das Corollar gilt tatsächlich nur für reguläre G_{δ}-Mengen (und deren Teilmengen), da nämlich $X^{*}\cdot 0^{\omega}$ zwar das Maß 0 hat, aber dicht in ganz X^{ω} ist.

Das voranstehende Beispiel zeigt auch, daß im Gegensatz zu X^{*} (s. Satz 6.13.) in X^{ω} nicht notwendig jede reguläre Menge vom Maße Null nirgends dicht ist.

Der folgende Satz wird uns die angekündigte Verträglichkeit von Maß und Kategorie für reguläre Teilmengen von X^{ω} zeigen. Zuvor führen wir noch einige Aussagen an, die uns beim Beweis von Nutzen sein werden. Es gelten in X^{ω} (vgl. etwa /Ku/):

(1) Jede G_{δ}-Menge erster Kategorie ist nirgends dicht.

(2) Ist $P \subseteq X^{\omega}$ eine F_{σ}-Menge, so ist $P \setminus J(P)$ Menge erster Kategorie. (Diese Aussage hatten wir auch implizit beim Beweis von Satz 6.17. abgeleitet.)

<u>Satz 6.20.</u> Eine reguläre Teilmenge von X^{ω} ist genau dann vom Maße Null, wenn sie erster Kategorie ist.

Beweis. Aus Corollar 3.14. ist ersichtlich, daß sich jede reguläre Teilmenge von X in der Form $\bigcup_{i=1}^{n} P_i \cap Q_i$, wobei die P_i reguläre F_{σ}-Mengen und die Q_i reguläre G_{δ}-Mengen sind, darstellen läßt. Es reicht also aus, die Behauptung für den Fall $n = 1$ zu zeigen.

Es seien also P reguläre F_{σ}-Menge und Q reguläre G_{δ}-Menge.

Weiter gilt $J(P) \cap Q \subseteq P \cap Q \subseteq (J(P) \cap Q) \cup (P \setminus J(P))$. Ist $P \cap Q$ eine Menge erster Kategorie, so ist $J(P) \cap Q$ als G_δ - Menge erster Kategorie nirgends dicht. Damit gilt, da $J(P) \cap Q$ regulär ist, $\bar{\mu}(J(P) \cap Q) = 0$. Schließlich erhalten wir aus dem Beweis von Satz 6.17. noch $\bar{\mu}(P \setminus J(P)) = 0$.
Ist andererseits $\bar{\mu}(P \cap Q) = 0$, so hat auch $J(P) \cap Q$ das Maß Null und istzufolge Corollar 6.19. nirgends dicht. Außerdem ist $P \setminus J(P)$ Menge erster Kategorie, und also $P \cap Q$ als Teilmenge einer Menge erster Kategorie selbst von erster Kategorie.∎

Mit diesem Satz, Satz 6.10.(1), Corollar 6.11.(1) und Lemma 6.16. können wir die Vereinigung aller regulären Nullmengen $\mathcal{R}_o$ wie folgt darstellen.

Corollar 6.21.

$$\mathcal{R}_o = \bigcup_{v \in X^*} (X^{/v/} \setminus \{v\}) = \bigcup_{v \in X^*} X^\omega \setminus X^* \cdot v \cdot X^\omega$$

Beweis. Die Inklusionen " $\supseteq$ " sind beide leicht einzusehen. Es sei jetzt $p \in P_o$, wobei P_o reguläre Nullmenge sei. Dann erhalten wir aus den Beweisen der Sätze 6.20. und 6.17. eine nirgends dichte reguläre Menge, in der p liegt. Damit ist $\mathcal{R}_o \subseteq \bigcup_{v \in X^*} X^\omega \setminus X^* \cdot v \cdot X^\omega$ gezeigt.
Die folgenden Beispiele belegen, daß die Verträglichkeit von Maß und Kategorie schon nicht für DPDA-akzeptierbare Folgenmengen gilt. Die angegebenen F_σ - bzw. G_δ - Mengen haben darüberhinaus endliches Gewicht, zeigen also, daß Satz 6.17. und die Corollare 6.18. und 6.19. nicht notwendig für Mengen endlichen Gewichts (im Gegensatz zu Lemma 6.16.) gelten.

<u>Beispiel 6.22.</u> Wir wählen die Menge V aus Beispiel 6.14.(2).
(1) Da V dicht in X^* ist, ist auch $V^\omega = \mathcal{G}_\delta(V)$ dicht in X^ω. Da weiter $\mu(V) < 1$ gilt, haben wir $\breve{\mu}(V^\omega) = 0$. Schließlich hat die Menge V^ω noch endliches Gewicht.
(2) Betrachten wir $P =_{df} X^\omega \setminus V^\omega$, so haben wir $\bar{\mu}(P) = 1$, aber P ist als Komplement der dichten G_δ - Menge V^ω eine F_σ - Menge erster Kategorie. Auch P hat als Komplement von V^ω endliches Gewicht.
(3) $V \cdot X^\omega$ ist eine offene dichte Menge mit $\bar{\mu}(V \cdot X^\omega) < 1$. Also ist $Q =_{df} X^\omega \setminus V \cdot X^\omega$ nirgends dicht,und es gilt $\bar{\mu}(Q) > 0$.

Weiter zeigen Satz 6.20. und Corollar 6.21., daß für reguläre Mengen die Eigenschaft, Nullmenge zu sein, von der speziellen Wahl des Produktmaßes unabhägig ist. Wir geben zum Abschluß noch zwei Beispiele an, die belegen, daß dieser Sachverhalt für BPDA-akzeptierbare Folgenmengen endlichen Gewichts nicht gilt.

Beispiel 6.23. (1) Wir definieren V_o durch die Gleichung $V_o = \{01,10\} \cup \{00,11\} \circ V_o^2$ (vgl. Beispiel 6.14.(2)). Dann gilt

$$\bar{\mu}(V_o^\omega) = \begin{cases} 1 \ , \ \text{wenn } \mu(0) = \mu(1) \\ 0 \ , \ \text{anderenfalls} \ . \end{cases}$$

(2) Definieren wir $V_{n,k}$ durch die Gleichung $V_{n,k} = (X^k \setminus \{0^k\}) \cup 0^k \circ V_{n,k}^n$, so gilt

$$\bar{\mu}(V_{n,k}^\omega) = \begin{cases} 1 \ , \ \text{wenn } \ \mu(0) \leq (\sqrt[k]{n})^{-1} \\ 0 \ , \ \text{anderenfalls} \ . \end{cases}$$

Die angegebene Mengenfamilie $(V_{n,k}^\omega)_{n,k=1}^\infty$ hat zugleich die Eigenschaft, daß es zu je zwei Produktmaßen $\bar{\mu}, \bar{\nu}$ $(\bar{\mu} \neq \bar{\nu})$ auf X^ω eine Menge $V_{n,k}$ mit $\bar{\mu}(V_{n,k}^\omega) = 1 - \bar{\nu}(V_{n,k}^\omega)$ gibt.

Literatur

/BK/ Brainerd W.S., R.B. Knode, Some criteria for determining recognicability of a set, Inform. Control 21(1972), 171 - 184

/Bü/ Büchi J.R., On a decision method in restricted second-order theories, Proc. Int. Congr. on Logik, Meth. and Phil. of Sc. 1960, Stanford Univ. Press, Stanford Calif. 1962

/Ch / Chouka Y., Theories of automata on ω-tapes: A simplified approach, J.Comp.Syst.Sc. 8(1974), 117 -141

/Da/ Davis M., Infintary games of perfect information, in Advances in game theory, Princeton Univ. Press, Princeton N.J. 1964, 89 - 101

/Gi/ Ginsburg S., The mathematical theory of context-free languages, McGraw-Hill, New York 1966

/GR/ Ginsburg S., H.G. Rice, Two families of languages related to ALGOL, J.ACM. 9(1962), 350 - 371

/HS/ Hartmanis J., R.E. Stearns, Sets of numbers defined by finite automata, Amer.Math.Monthly 74(1967),539-542

/Ho/ Hossley R., Finite tree automata and ω-automata, Ph.D.Dissertation, MIT Cambridge Mass., 1970

/Jo/ Johnson H.R. Infinite strings over finite machines, Ph.D.Dissertation, Univ. of Illinois, Urbana Ill. 1970

/Ku/ Kuratowski K., Topology I, Academic Press New York and London, PWN Warszawa 1966

/La/ Landweber L.H., Decision problems for ω-automata, Math.Syst.Theory III/4 (1969), 376 - 384)

/Ld/ Lindner R., On the theory of inference-operators, Proc.Int.Congr.Math.,Vancouver 1974, 471 - 475

/LS/ Lindner R., L. Staiger, Erkennungs-, maß- und informationstheoretische Eigenschaften regulärer Folgenmengen, erscheint in Z.Math.Logik u. Grundl.Math.

/Li/ Linna M., On ω -words and ω -computations, Ann.Univ. Turku., Series A 168 (1975)

/MN/ McNaughton R., Testing and generating infinite sequences by a finite automaton, Inform. Control 9 (1966), 521 - 530

/Mü/ Müller D.E., Infinite sequences and finite machines, Switch.Circ.Th. and Log.Design, Proc. Fourth Ann. Symp. IEEE, Chicago 1963

/Ox/ Oxtoby J.C., Measure and category, Springer, Berlin - Heidelberg - New York 1971

/Ra 1/ Rabin M.O., Decidability of second-order theories and automata on infinite trees, Trans.Amer.Math.Soc. 141 (1969), 1 - 35

/Ra 2/ Rabin M.O., Automata on infinite objects and Church's problem, Reg.Conf.Ser.Math. 13, Amer.Math.Soc., Providence, Rhode Island, 1972

/Sc/ Schnorr C.P., Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1971

/SS/ Schnorr C.P., H. Stimm, Endliche Automaten und Zufallsfolgen, Acta Informatica 1(1972), 345,-359

/St 1/ Staiger L., Über ein Analogon des Satzes von Ginsburg - Rose für sequentielle Folgenoperatoren und reguläre Folgenmengen, Diplomarbeit an der Friedrich-Schiller-Universität Jena 1970

/St 2/ Staiger L., Ein Analogon des Satzes von Ginsburg - Rose für sequentielle Operatoren und reguläre Folgenmengen, erscheint in Sb. trudov, RZ Akad.Wiss. d. UdSSR (in russ.)

/St 3/ Staiger L., Eine Bemerkung zur Charakterisierung von Folgenmengen durch Wortmengen, EIK 8(1972), 589 - 592

/St 4/ Staiger L., Reguläre Nullmengen, EIK 12(1976),307-311

/SW 1/ Staiger L., K. Wagner, Automatentheoretische und automatenfreie Charakterisierungen topologischer Klassen regulärer Folgenmengen, EIK 10(1974), 379 - 392

/SW 2/ Staiger L., K. Wagner, Zur Theorie der Abstrakten Familien von ω-Sprachen (ω-AFL), Tagungsber. II.Int. Symp.Alg.Kompl., Lern-u. Erkennungsproz., Jena 1976

/Tr/ Trachtenbrot B.A., Endliche Automaten und die Logik der einstelligen Prädikate, Sib.Math.J. 3(1962), 103 - 131 (in russ.)

/TB/ Trachtenbrot B.A., J.M. Barsdin, Endliche Automaten, Nauka, Moskau 1970 (in russ.)

/Wa 1/ Wagner K.,Acceptation degrees of regular sequence sets, erscheint in Inform. Control

/Wa 2/ Wagner K., Zur Theorie der regulären Folgenmengen, Diss. B an der Friedrich-Schiller-Univ., Jena 1976

/Ma/ Markov Al.A., Über einige Eigenschaften von unendlichen Präfix-Codes, Probl.Peredac.Inf. 4(1970), 97 - 98

Ich erkläre hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbst verfaßt und andere als die angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe.

Jena, im September 1976